Vetores e Geometria Analítica – ECT2102

Vetores

Prof. Ronaldo Carlotto Batista

9 de setembro de 2019

Sistema de coordenadas e distâncias

Nesse curso usaremos o sistema de coordenadas cartesiano destro em três (ou duas) dimensões. Nesse sistema, as coordenadas de um ponto P são representadas por $P\,(x, y, z)$. Sejam os pontos $P_1\,(x_1, y_1, z_1)$ e $P_2\,(x_2, y_2, z_2)$, a distância entre eles é dada por:

$$|P_1 P_2| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2}\,.$$

Sistema de coordenadas e distâncias

Nesse curso usaremos o sistema de coordenadas cartesiano destro em três (ou duas) dimensões. Nesse sistema, as coordenadas de um ponto P são representadas por $P\,(x, y, z)$. Sejam os pontos $P_1\,(x_1, y_1, z_1)$ e $P_2\,(x_2, y_2, z_2)$, a distância entre eles é dada por:

$$|P_1P_2| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2}\,.$$

- Exemplo:
  Qual é a distância entre os pontos $P_1\,(2, 1, 5)$ e $P_2\,(-2, 3, 0)$?

Segmento de Reta Orientado

Dados dois pontos $A\left(x_A, y_A, z_A\right)$ e $B\left(x_B, y_B, z_B\right)$, podemos construir um segmento de reta orientado de A para B, que é representado por:

$$\vec{AB} = \left(\left(x_B - x_A\right), \left(y_B - y_A\right), \left(z_B - z_A\right)\right) \ .$$

Este objeto tem três propriedades: comprimento (dado por $|AB|$), direção (dada pela reta que passa por A e B) e sentido (de A para B).

Definição de vetor

Vetor é um ente matemático que possui três propriedades:

- Módulo (ou comprimento ou magnitude),
- Direção,
- Sentido.

Um vetor pode ser representado por um segmento de reta orientado $\vec{AB}$, mas que pode ser transladado pelo espaço de forma que não tenha sua propriedades alteradas. Seu módulo é dado pela distância entre os pontos $A\left(x_A, y_A, z_A\right)$ e $B\left(x_B, y_B, z_B\right)$:

$$|\vec{AB}| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}$$

Definição de vetor

Um vetor $\vec{v} = \vec{AB}$ pode ser transportado para qualquer posição do sistema de coordenadas. Usualmente representamos os vetores partindo da origem do sistema de coordenadas e suas componentes são dadas por:

$$\vec{v} = (v_1, v_2, v_3) \ ,$$

onde

$$\begin{aligned} v_1 &= x_B - x_A \\ v_2 &= y_B - y_A \\ v_3 &= z_B - z_A \end{aligned}$$

Definição de vetor

Em função das componentes, o módulo de um vetor $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$ é dado por:

$$|\vec{v}| = \sqrt{(v_1)^2 + (v_2)^2 + (v_3)^2}$$

Definição de vetor

Em função das componentes, o módulo de um vetor $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$ é dado por:

$$|\vec{v}| = \sqrt{(v_1)^2 + (v_2)^2 + (v_3)^2}$$

- Exemplo 1:
  Seja $\vec{v} = \vec{AB}$, onde $A(-3, 4, 1)$ e $B(-5, 2, 2)$. Calcule as componentes de $\vec{v}$ e seu módulo.

Definição de vetor

Em função das componentes, o módulo de um vetor $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$ é dado por:

$$|\vec{v}| = \sqrt{(v_1)^2 + (v_2)^2 + (v_3)^2}$$

- Exemplo 1:
  Seja $\vec{v} = \vec{AB}$, onde $A\,(-3, 4, 1)$ e $B\,(-5, 2, 2)$. Calcule as componentes de $\vec{v}$ e seu módulo.

- Exemplo 2:
  Um carrinho é puxado com uma força constante $|\vec{F}| = 20N$ fazendo um ângulo de 45° com a horizontal. Quais são as componentes vertical e horizontal da força?

Operações Algébricas

Vamos definir duas operações algébricas com vetores:

- Adição de vetores: sejam dois vetores $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$ e $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$, a soma desses vetores é definida por

$$\vec{v} + \vec{u} = (v_1 + u_1, v_2 + u_2, v_3 + u_3) \ .$$

- Multiplicação por escalar: sejam um vetor $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$ e um escalar k, a multiplicação desse vetor pelo escalar é definida por

$$k\vec{v} = (kv_1, kv_2, kv_3) \ .$$

Propriedades Algébricas

Sejam os vetores $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$ e os escalares a e b.

1. $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$
2. $(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w})$
3. $\vec{u} + \vec{0} = \vec{u}$
4. $\vec{u} + (-\vec{u}) = \vec{0}$
5. $0\vec{u} = \vec{0}$
6. $1\vec{u} = \vec{u}$
7. $a\,(b\vec{u}) = (ab)\,\vec{u}$
8. $a\,(\vec{u} + \vec{v}) = a\vec{u} + a\vec{v}$
9. $(a + b)\,\vec{u} = a\vec{u} + b\vec{u}$

Propriedades Algébricas

Sejam os vetores $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$ e os escalares a e b.

1. $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$
2. $(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w})$
3. $\vec{u} + \vec{0} = \vec{u}$
4. $\vec{u} + (-\vec{u}) = \vec{0}$
5. $0\vec{u} = \vec{0}$
6. $1\vec{u} = \vec{u}$
7. $a\,(b\vec{u}) = (ab)\,\vec{u}$
8. $a\,(\vec{u} + \vec{v}) = a\vec{u} + a\vec{v}$
9. $(a + b)\,\vec{u} = a\vec{u} + b\vec{u}$

Note que essas operações sempre levam vetores em vetores.

Soma de Vetores

- Exemplo 1:
  Sejam $\vec{v} = (2, 1)$ e $\vec{u} = (1, -2)$. Represente graficamente esses vetores e calcule:
  - $\vec{u} + \vec{v}$ e $|\vec{u} + \vec{v}|$
  - $\vec{u} - \vec{v}$ e $|\vec{u} - \vec{v}|$

Soma de Vetores

- Exemplo 1:
  Sejam $\vec{v} = (2, 1)$ e $\vec{u} = (1, -2)$. Represente graficamente esses vetores e calcule:
  - $\vec{u} + \vec{v}$ e $|\vec{u} + \vec{v}|$
  - $\vec{u} - \vec{v}$ e $|\vec{u} - \vec{v}|$
- Exemplo 2:

Um barco atravessa o Rio Potengi, saindo da margem norte e chegando à margem sul, com uma velocidade de $10km/h$ em relação à àgua e fazendo um ângulo de 30°ao leste da linha imaginária que liga a margem norte à sul. O rio está fluindo com uma velocidade de $6km/h$. Qual é o módulo e a direção da velocidade efetiva do barco?

Vetores Unitários

Definição: $\vec{v}$ é um vetor unitário se

$$|\vec{v}| = 1 \ .$$

A qualquer vetor $\vec{u}$ não nulo podemos associar um vetor unitário definido por:

$$\hat{u} = \frac{\vec{u}}{|\vec{u}|} \ .$$

Podemos dizer que o versor $\hat{u}$ define a direção do vetor $\vec{u}$.

Vetores Unitários

Definição: $\vec{v}$ é um vetor unitário se

$$|\vec{v}| = 1 \ .$$

A qualquer vetor $\vec{u}$ não nulo podemos associar um vetor unitário definido por:

$$\hat{u} = \frac{\vec{u}}{|\vec{u}|} \ .$$

Podemos dizer que o versor $\hat{u}$ define a direção do vetor $\vec{u}$. Qualquer vetor $\vec{u}$ pode ser expresso como uma combinação linear de vetores que formam uma base completa. Nesse curso vamos utilizar a "base canônica":

$$\begin{aligned} \hat{i} &= (1,0,0) \\ \hat{j} &= (0,1,0) \\ \hat{k} &= (0,0,1) \end{aligned}$$

Vetores Unitários

Na base canônica, qualquer vetor pode ser expresso da seguinte forma:

$$\vec{v} = v_1\hat{i} + v_2\hat{j} + v_3\hat{k}\,.$$

Formalmente, aqui v_1, v_2 e v_3 são as coordenadas do vetor na base, que, no caso da base canônica, são idênticas às componentes do vetor.

Vetores Unitários

Na base canônica, qualquer vetor pode ser expresso da seguinte forma:

$$\vec{v} = v_1\hat{i} + v_2\hat{j} + v_3\hat{k}\,.$$

Formalmente, aqui v_1, v_2 e v_3 são as coordenadas do vetor na base, que, no caso da base canônica, são idênticas às componentes do vetor.

- Exemplo 1:
  Encontre o versor associado ao vetor $\vec{v} = 2\hat{i} - \hat{j} + 2\hat{k}$.

Vetores Unitários

Na base canônica, qualquer vetor pode ser expresso da seguinte forma:

$$\vec{v} = v_1 \hat{i} + v_2 \hat{j} + v_3 \hat{k}\ .$$

Formalmente, aqui v_1, v_2 e v_3 são as coordenadas do vetor na base, que, no caso da base canônica, são idênticas às componentes do vetor.

- Exemplo 1:
  Encontre o versor associado ao vetor $\vec{v} = 2\hat{i} - \hat{j} + 2\hat{k}$.

Resp.: $\hat{v} = \frac{2}{3}\hat{i} - \frac{1}{3}\hat{j} + \frac{2}{3}\hat{k} = \frac{1}{3}\left(2\hat{i} - \hat{j} + 2\hat{k}\right)$

- Exemplo 2:
  Uma força de módulo 6N é aplicada na direção do vetor $\vec{v} = 2\hat{i} + 2\hat{j} - \hat{k}$. Expresse o vetor força como o produto da sua magnitude e direção.

Vetores Unitários

Na base canônica, qualquer vetor pode ser expresso da seguinte forma:

$$\vec{v} = v_1\hat{i} + v_2\hat{j} + v_3\hat{k}\,.$$

Formalmente, aqui v_1, v_2 e v_3 são as coordenadas do vetor na base, que, no caso da base canônica, são idênticas às componentes do vetor.

- Exemplo 1:
  Encontre o versor associado ao vetor $\vec{v} = 2\hat{i} - \hat{j} + 2\hat{k}$.

Resp.: $\hat{v} = \frac{2}{3}\hat{i} - \frac{1}{3}\hat{j} + \frac{2}{3}\hat{k} = \frac{1}{3}\left(2\hat{i} - \hat{j} + 2\hat{k}\right)$

- Exemplo 2:
  Uma força de módulo 6N é aplicada na direção do vetor $\vec{v} = 2\hat{i} + 2\hat{j} - \hat{k}$. Expresse o vetor força como o produto da sua magnitude e direção.

Resp.: $\vec{F} = 6\left(\frac{2}{3}\hat{i} + \frac{2}{3}\hat{j} - \frac{1}{3}\hat{k}\right)$

Vetores Unitários

- Exemplo 3*: Lei de Coulomb
  A Lei de Coulomb determina o vetor força, $\vec{F}$, entre duas cargas pontuais q_1 e q_2, seu módulo é

$$F = k\frac{|q_1 q_2|}{r^2},$$

  onde r é a distância entre as cargas e k é constante eletrostática. Sabendo que a direção da força é determinada pela linha que une as duas cargas, que cargas com sinais opostos se atraem e de sinais iguais se repelem, determine a expressão de $\vec{F}$.

Vetores Unitários

- Exemplo 3*: Lei de Coulomb
  A Lei de Coulomb determina o vetor força, $\vec{F}$, entre duas cargas pontuais q_1 e q_2, seu módulo é

$$F = k\frac{|q_1 q_2|}{r^2},$$

  onde r é a distância entre as cargas e k é constante eletrostática. Sabendo que a direção da força é determinada pela linha que une as duas cargas, que cargas com sinais opostos se atraem e de sinais iguais se repelem, determine a expressão de $\vec{F}$.

Resposta:

$$\vec{F} = k\frac{q_1 q_2}{r^2}\hat{r} = k\frac{q_1 q_2}{r^3}\vec{r}$$

Produto Escalar

O produto escalar entre dois vetores no espaço 3D $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$ e $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$ é definido por:

$$\vec{v} \cdot \vec{u} = v_1 u_1 + v_2 u_2 + v_3 u_3 \ ,$$

o que pode ser generalizador por:

$$\vec{v} \cdot \vec{u} = \sum_{i=1}^{N} v_i u_i \ ,$$

onde N é o número de dimensões do espaço vetorial.

Produto Escalar

O produto escalar entre dois vetores no espaço 3D $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$ e $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$ é definido por:

$$\vec{v} \cdot \vec{u} = v_1 u_1 + v_2 u_2 + v_3 u_3 \ ,$$

o que pode ser generalizador por:

$$\vec{v} \cdot \vec{u} = \sum_{i=1}^{N} v_i u_i \ ,$$

onde N é o número de dimensões do espaço vetorial.

- Exemplo:
  Calcule o produto escalar dos vetores $\vec{v} = (1, -2, -1)$ e $\vec{u} = (-6, 2, -3)$, calcule também $\vec{u} \cdot \vec{u}$ e o módulo de $\vec{u}$. Qual a relação entre o módulo de um vetor e o produto escalar dele com ele mesmo?

Produto Escalar

O produto escalar entre dois vetores no espaço 3D $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$ e $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$ é definido por:

$$\vec{v} \cdot \vec{u} = v_1 u_1 + v_2 u_2 + v_3 u_3 \ ,$$

o que pode ser generalizador por:

$$\vec{v} \cdot \vec{u} = \sum_{i=1}^{N} v_i u_i \ ,$$

onde N é o número de dimensões do espaço vetorial.

- Exemplo:
  Calcule o produto escalar dos vetores $\vec{v} = (1, -2, -1)$ e $\vec{u} = (-6, 2, -3)$, calcule também $\vec{u} \cdot \vec{u}$ e o módulo de $\vec{u}$. Qual a relação entre o módulo de um vetor e o produto escalar dele com ele mesmo?

Resp.: $\vec{u} \cdot \vec{v} = -7$, $\vec{u} \cdot \vec{u} = 49$, $|\vec{u}| = \sqrt{\vec{u} \cdot \vec{u}} = 7$.

Produto Escalar e ângulo entre vetores

Vamos primeiramente deduzir a lei dos cossenos:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos(\theta) \quad .$$

Produto Escalar e ângulo entre vetores

Vamos primeiramente deduzir a lei dos cossenos:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos(\theta) \ .$$

Agora vamos calcular o módulo do vetor $\vec{w} = \vec{u} - \vec{v}$, pela lei dos cossenos temos:

$$|\vec{w}|^2 = |\vec{u}|^2 + |\vec{v}|^2 - 2|\vec{u}||\vec{v}|\cos(\theta) \ ,$$

onde θ é o ângulo entre os vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$.

Produto Escalar e ângulo entre vetores

Vamos primeiramente deduzir a lei dos cossenos:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos(\theta) \quad .$$

Agora vamos calcular o módulo do vetor $\vec{w} = \vec{u} - \vec{v}$, pela lei dos cossenos temos:

$$|\vec{w}|^2 = |\vec{u}|^2 + |\vec{v}|^2 - 2|\vec{u}||\vec{v}|\cos(\theta) \quad ,$$

onde θ é o ângulo entre os vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$.
Com isso podemos mostrar que o produto escalar também pode ser expresso por:

$$\vec{v} \cdot \vec{u} = |\vec{v}||\vec{u}|\cos(\theta) \quad .$$

Produto Escalar e ângulo entre vetores

Note que da definição anterior do produto escalar, podemos facilmente determinar o ângulo entre dois vetores:

$$\theta = \arccos\left[\frac{\vec{v}\cdot\vec{u}}{|\vec{v}||\vec{u}|}\right] \ .$$

Produto Escalar e ângulo entre vetores

Note que da definição anterior do produto escalar, podemos facilmente determinar o ângulo entre dois vetores:

$$\theta = \arccos\left[\frac{\vec{v}\cdot\vec{u}}{|\vec{v}||\vec{u}|}\right] .$$

- Exemplo 1:
  Encontre o ângulo entre os vetores $\vec{u} = \hat{i} - 2\hat{j} - 2\hat{k}$ e $\vec{v} = 6\hat{i} + 3\hat{j} + 2\hat{k}$.

Produto Escalar e ângulo entre vetores

Note que da definição anterior do produto escalar, podemos facilmente determinar o ângulo entre dois vetores:

$$\theta = \arccos\left[\frac{\vec{v}\cdot\vec{u}}{|\vec{v}||\vec{u}|}\right] .$$

- Exemplo 1:
  Encontre o ângulo entre os vetores $\vec{u} = \hat{i} - 2\hat{j} - 2\hat{k}$ e $\vec{v} = 6\hat{i} + 3\hat{j} + 2\hat{k}$.

Resp.: $\theta = \arccos\left(-4/21\right) = 100,98^{\circ} = 1,76\text{rad}$

- Exemplo 2:
  Um triângulo tem como vértices os pontos $A\left(0,0\right)$, $B\left(3,5\right)$ e $C\left(5,2\right)$. Encontre o ângulo entre os lados BC e AC.

Produto Escalar e ângulo entre vetores

Note que da definição anterior do produto escalar, podemos facilmente determinar o ângulo entre dois vetores:

$$\theta = \arccos\left[\frac{\vec{v}\cdot\vec{u}}{|\vec{v}||\vec{u}|}\right] .$$

- Exemplo 1:
  Encontre o ângulo entre os vetores $\vec{u} = \hat{i} - 2\hat{j} - 2\hat{k}$ e $\vec{v} = 6\hat{i} + 3\hat{j} + 2\hat{k}$.

Resp.: $\theta = \arccos\left(-4/21\right) = 100,98^{\circ} = 1,76\text{rad}$

- Exemplo 2:
  Um triângulo tem como vértices os pontos $A\left(0,0\right)$, $B\left(3,5\right)$ e $C\left(5,2\right)$. Encontre o ângulo entre os lados BC e AC.

Resp.: $\theta = \arccos\left(4/\sqrt{29}\sqrt{13}\right) = 78,1^{\circ} = 1,36\text{rad}$

Propriedades do Produto Escalar

Sejam $\vec{u}$ e $\vec{v}$ vetores e a um escalar. O produto escalar apresenta as seguintes propriedades:

1. $\vec{v} \cdot \vec{u} = \vec{u} \cdot \vec{v}$
2. $(a\vec{u}) \cdot \vec{v} = a\,(\vec{u} \cdot \vec{v})$
3. $\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$
4. $\vec{u} \cdot \vec{u} = |\vec{u}|^2$
5. $\vec{0} \cdot \vec{u} = 0$

Propriedades do Produto Escalar

Sejam $\vec{u}$ e $\vec{v}$ vetores e a um escalar. O produto escalar apresenta as seguintes propriedades:

1. $\vec{v} \cdot \vec{u} = \vec{u} \cdot \vec{v}$
2. $(a\vec{u}) \cdot \vec{v} = a\,(\vec{u} \cdot \vec{v})$
3. $\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$
4. $\vec{u} \cdot \vec{u} = |\vec{u}|^2$
5. $\vec{0} \cdot \vec{u} = 0$

Note que o produto escalar leva dois vetores em um escalar.

Vetores Ortogonais

Dois vetores são ditos ortogonais, ou perpendiculares, se o ângulo entre eles é de 90°. Nesse caso temos:

$$\vec{v} \cdot \vec{u} = |\vec{v}||\vec{u}| \cos(90^\circ) = 0 \ .$$

Vetores Ortogonais

Dois vetores são ditos ortogonais, ou perpendiculares, se o ângulo entre eles é de 90°. Nesse caso temos:

$$\vec{v} \cdot \vec{u} = |\vec{v}||\vec{u}| \cos(90°) = 0 \ .$$

Note portanto que a base canônica $\left\{\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}\right\}$é uma **base ortogonal**. Como o módulo desses vetores é unitário, eles também formam uma **base normal**. Portanto a base $\left\{\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}\right\}$ é uma **base ortonormal**, isto é, a base canônica é ao mesmo tempo ortogonal e normal.

Projeção Ortogonal

A projeção ortogonal de um vetor $\vec{u}$ em um vetor $\vec{v}$ é dada por:

$$\mathrm{proj}_{\vec{v}}\vec{u} = \left(\frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{v}|}\right)\hat{v} = \left(\frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{v}|^2}\right)\vec{v}$$

Projeção Ortogonal

A projeção ortogonal de um vetor $\vec{u}$ em um vetor $\vec{v}$ é dada por:

$$\mathrm{proj}_{\vec{v}}\vec{u} = \left(\frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{v}|}\right)\hat{v} = \left(\frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{v}|^2}\right)\vec{v}$$

Podemos decompor um vetor $\vec{u}$ em uma soma de dois vetores, um paralelo e outro ortogonal a um dado vetor $\vec{v}$:

$$\vec{u} = \mathrm{proj}_{\vec{v}}\vec{u} + (\vec{u} - \mathrm{proj}_{\vec{v}}\vec{u})$$

Projeção Ortogonal

- Exemplo 1:
  Sejam os vetores:

$$\begin{aligned}\vec{u} &= 6\hat{i} + 3\hat{j} + 2\hat{k} \\ \vec{v} &= \hat{i} - 2\hat{j} - 2\hat{k}\end{aligned}$$

  Encontre $\mathrm{proj}_{\vec{v}}\vec{u}$ a projeção de $\vec{u}$ ortogonal a $\vec{v}$, também verifique se esta projeção é de fato ortogonal a $\vec{v}$.

Projeção Ortogonal

- Exemplo 1:
  Sejam os vetores:

$$\begin{aligned} \vec{u} &= 6\hat{i} + 3\hat{j} + 2\hat{k} \\ \vec{v} &= \hat{i} - 2\hat{j} - 2\hat{k} \end{aligned}$$

  Encontre $\mathrm{proj}_{\vec{v}}\vec{u}$ a projeção de $\vec{u}$ ortogonal a $\vec{v}$, também verifique se esta projeção é de fato ortogonal a $\vec{v}$.

- Exemplo 2:
  Uma força $\vec{F} = 2\hat{i} + \hat{j} - 3\hat{k}$ é aplicada a um avião com velocidade $\vec{v} = 3\hat{i} - \hat{j}$. Expresse as componentes de $\vec{F}$ paralela e ortogonal a $\vec{v}$.

Trabalho

O trabalho W de uma força constante $\vec{F}$ sobre um partícula deslocada de uma quantidade $\vec{D}$ é dado pelo seguinte produto escalar:

$$W = \vec{F} \cdot \vec{D}$$

Trabalho

O trabalho W de uma força constante $\vec{F}$ sobre um partícula deslocada de uma quantidade $\vec{D}$ é dado pelo seguinte produto escalar:

$$W = \vec{F} \cdot \vec{D}$$

- Exemplo 1:
  Qual é o trabalho realizado por uma força de módulo $|\vec{F}| = 40N$ que movimenta uma partícula por 3m fazendo um ângulo de 60° com a direção desse deslocamento?

Trabalho

O trabalho W de uma força constante $\vec{F}$ sobre um partícula deslocada de uma quantidade $\vec{D}$ é dado pelo seguinte produto escalar:

$$W = \vec{F} \cdot \vec{D}$$

- Exemplo 1:
  Qual é o trabalho realizado por uma força de módulo $|\vec{F}| = 40$N que movimenta uma partícula por 3m fazendo um ângulo de 60° com a direção desse deslocamento?

Resp.: $W = 60J$

- Exemplo 2:
  Qual é o trabalho realizado pela força gravitacional da Terra sobre a Lua?

Trabalho

O trabalho W de uma força constante $\vec{F}$ sobre um partícula deslocada de uma quantidade $\vec{D}$ é dado pelo seguinte produto escalar:

$$W = \vec{F} \cdot \vec{D}$$

- Exemplo 1:
  Qual é o trabalho realizado por uma força de módulo $|\vec{F}| = 40\text{N}$ que movimenta uma partícula por 3m fazendo um ângulo de 60° com a direção desse deslocamento?

Resp.: $W = 60J$

- Exemplo 2:
  Qual é o trabalho realizado pela força gravitacional da Terra sobre a Lua?

Resp.: $W = 0J$

Produto Vetorial

O produto vetorial entre dois vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ é dado por:

$$\vec{u} \times \vec{v} = |\vec{u}||\vec{v}|\text{sen}\theta\hat{n}\,,$$

θ é o ângulo entre $\vec{u}$ e $\vec{v}$ e o versor $\hat{n}$ é ortogonal aos vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$, sendo definido pela "regra da mão direita".

Produto Vetorial

O produto vetorial entre dois vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ é dado por:

$$\vec{u} \times \vec{v} = |\vec{u}||\vec{v}|\text{sen}\theta\hat{n}\,,$$

θ é o ângulo entre $\vec{u}$ e $\vec{v}$ e o versor $\hat{n}$ é ortogonal aos vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$, sendo definido pela “regra da mão direita”.

Vetores não nulos $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são colineares (paralelos ou antiparalelos) se e somente se

$$\vec{u} \times \vec{v} = \vec{0}\,.$$

Produto Vetorial

Dados dois vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ decompostos na base canônica, isto é,

$$\begin{aligned}\vec{u} &= u_1\hat{i} + u_2\hat{j} + u_3\hat{k}\,,\\ \vec{v} &= v_1\hat{i} + v_2\hat{j} + v_3\hat{k}\,,\end{aligned}$$

podemos calcular o produto vetorial entre $\vec{u}$ e $\vec{v}$ usando o seguinte determinante:

$$\vec{u}\times\vec{v} = \det\begin{pmatrix}\hat{i} & \hat{j} & \hat{k}\\ u_1 & u_2 & u_3\\ v_1 & v_2 & v_3\end{pmatrix},$$

que por sua vez, usando a expansão de Laplace na primeira linha, pode ser expresso por:

$$\vec{u}\times\vec{v} = \hat{i}\det\begin{pmatrix}u_2 & u_3\\ v_2 & v_3\end{pmatrix} - \hat{j}\det\begin{pmatrix}u_1 & u_3\\ v_1 & v_3\end{pmatrix} + \hat{k}\det\begin{pmatrix}u_1 & u_2\\ v_1 & v_2\end{pmatrix}$$

Propriedades do Produto Vetorial

Sejam $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$ vetores e r e s escalares. O produto vetorial tem as seguintes propriedades:

1. $r\vec{u} \times s\vec{v} = (rs)\,\vec{u} \times \vec{v}$
2. $\vec{u} \times (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \times \vec{v} + \vec{u} \times \vec{w}$
3. $(\vec{v} + \vec{w}) \times \vec{u} = \vec{v} \times \vec{u} + \vec{w} \times \vec{u}$
4. $\vec{u} \times \vec{v} = -\vec{v} \times \vec{u}$
5. $\vec{0} \times \vec{u} = \vec{0}$

Propriedades do Produto Vetorial

Sejam $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$ vetores e r e s escalares. O produto vetorial tem as seguintes propriedades:

1. $r\vec{u} \times s\vec{v} = (rs)\,\vec{u} \times \vec{v}$
2. $\vec{u} \times (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \times \vec{v} + \vec{u} \times \vec{w}$
3. $(\vec{v} + \vec{w}) \times \vec{u} = \vec{v} \times \vec{u} + \vec{w} \times \vec{u}$
4. $\vec{u} \times \vec{v} = -\vec{v} \times \vec{u}$
5. $\vec{0} \times \vec{u} = \vec{0}$

Note que o produto vetorial leva dois vetores em outro vetor.

Produto Vetorial – Exemplo

- Exemplo 1:
  Calcule o produto vetorial entre os vetores

$$
\begin{aligned}
\vec{u} &= 2\hat{i} + \hat{j} + \hat{k} \\
\vec{v} &= -4\hat{i} + 3\hat{j} + \hat{k}\,.
\end{aligned}
$$

  Verifique que o vetor resultante do produto vetorial é ortogonal ao vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$.

Produto Vetorial – Área do paralelogramo

A área de um paralelogramo pode ser calculada tomando o módulo do produto vetorial entre os vetores que $\vec{u}$ e $\vec{v}$ que cobrem sua base e seu lado inclinado:

$$A = |\vec{u} \times \vec{v}|$$

Produto Vetorial – Área do paralelogramo

A área de um paralelogramo pode ser calculada tomando o módulo do produto vetorial entre os vetores que $\vec{u}$ e $\vec{v}$ que cobrem sua base e seu lado inclinado:

$$A = |\vec{u} \times \vec{v}|$$

- Exemplo 1:
  Determine a área do paralelogramo com vértices $A\,(0,0)$, $B\left(\sqrt{3}, 1/2\right)$, $C\left(3+\sqrt{3}, 1/2\right)$ e $D\,(3,0)$.

Produto Vetorial – Área do paralelogramo

A área de um paralelogramo pode ser calculada tomando o módulo do produto vetorial entre os vetores que $\vec{u}$ e $\vec{v}$ que cobrem sua base e seu lado inclinado:

$$A = |\vec{u} \times \vec{v}|$$

- Exemplo 1:
  Determine a área do paralelogramo com vértices $A\,(0,0)$, $B\left(\sqrt{3}, 1/2\right)$, $C\left(3+\sqrt{3}, 1/2\right)$ e $D\,(3,0)$.

- Exemplo 2:
  Determine a área do triângulo com vértices $P\,(1,-1,0)$, $Q\,(2,1,-1)$ e $R\,(-1,1,2)$.

Momento Angular, Torque e Força de Lorentz

Na física existem vários exemplos de quantidades definidas em função do produto vetorial, por exemplo:

- O momento angular* é definido por:

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = |\vec{r}||\vec{p}|\text{sen}\theta\hat{n}\,.$$

Momento Angular, Torque e Força de Lorentz

Na física existem vários exemplos de quantidades definidas em função do produto vetorial, por exemplo:

- O momento angular* é definido por:

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = |\vec{r}||\vec{p}|\text{sen}\theta\hat{n}\,.$$

- O torque é definido por

$$\vec{T} = \vec{r} \times \vec{F} = |\vec{r}||\vec{F}|\text{sen}\theta\hat{n}\,.$$

Momento Angular, Torque e Força de Lorentz

Na física existem vários exemplos de quantidades definidas em função do produto vetorial, por exemplo:

- O momento angular* é definido por:

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = |\vec{r}||\vec{p}|\text{sen}\theta\hat{n}\,.$$

- O torque é definido por

$$\vec{T} = \vec{r} \times \vec{F} = |\vec{r}||\vec{F}|\text{sen}\theta\hat{n}\,.$$

- A Força de Lorentz* sobre uma carga q é dada por:

$$\vec{F} = q\vec{E} + q\vec{v} \times \vec{B}$$

Torque – Exemplo

- Exemplo:
  Uma chave inglesa aperta um parafuso localizado no ponto $O\,(0,0,0)$. O braço da chave vai até o ponto $P\,(0,2,0)$ (em centímetros). Uma força $\vec{F} = 2\hat{j} - 2\hat{k}$ (em N) é aplicada na extremidade da chave. (a) Qual é o vetor torque? (b) Qual o ângulo que a força faz com o braço da chave inglesa?

Torque – Exemplo

- Exemplo:
  Uma chave inglesa aperta um parafuso localizado no ponto $O\,(0,0,0)$. O braço da chave vai até o ponto $P\,(0,2,0)$ (em centímetros). Uma força $\vec{F} = 2\hat{j} - 2\hat{k}$ (em N) é aplicada na extremidade da chave. (a) Qual é o vetor torque? (b) Qual o ângulo que a força faz com o braço da chave inglesa?

Resp.: $\vec{T} = -4\hat{i}$ N.cm$\theta = 45°$

Produto Misto

O produto misto entre três vetores $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$ é definido por

$$(\vec{u} \times \vec{v}) \cdot \vec{w} = |\vec{u} \times \vec{v}||\vec{w}| \cos\theta \, .$$

Note que o produto misto leva três vetores em um escalar.

Produto Misto

O produto misto entre três vetores $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$ é definido por

$$(\vec{u} \times \vec{v}) \cdot \vec{w} = |\vec{u} \times \vec{v}||\vec{w}| \cos\theta \,.$$

Note que o produto misto leva três vetores em um escalar.
O produto misto também pode ser expresso por

$$(\vec{u} \times \vec{v}) \cdot \vec{w} = \det \begin{pmatrix} w_1 & w_2 & w_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{pmatrix}$$

Produto Misto

O produto misto entre três vetores $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$ é definido por

$$(\vec{u} \times \vec{v}) \cdot \vec{w} = |\vec{u} \times \vec{v}||\vec{w}| \cos\theta \,.$$

Note que o produto misto leva três vetores em um escalar.
O produto misto também pode ser expresso por

$$(\vec{u} \times \vec{v}) \cdot \vec{w} = \det \begin{pmatrix} w_1 & w_2 & w_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{pmatrix}$$

Note que a troca cíclica dos vetores não altera o produto misto, isto é:

$$(\vec{u} \times \vec{v}) \cdot \vec{w} = (\vec{w} \times \vec{u}) \cdot \vec{v} = (\vec{v} \times \vec{w}) \cdot \vec{u}$$

Produto Misto – Volume do Paralelepípedo

Alinhando os vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ com os lados da base de um paralelepípedo e um vetor $\vec{w}$ com seu lado vertical, podemos mostrar que seu volume é dado por:

$$V = |(\vec{u} \times \vec{v}) \cdot \vec{w}|\,.$$

Produto Misto – Volume do Paralelepípedo

Alinhando os vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ com os lados da base de um paralelepípedo e um vetor $\vec{w}$ com seu lado vertical, podemos mostrar que seu volume é dado por:

$$V = |(\vec{u} \times \vec{v}) \cdot \vec{w}|.$$

- Exemplo:
  Encontre o volume de um paralelepípedo formado pelos vetores

$$\begin{aligned} \vec{u} &= \hat{i} + 2\hat{j} - \hat{k} \\ \vec{v} &= -2\hat{i} + 3\hat{k} \\ \vec{w} &= 7\hat{j} - 4\hat{k} \end{aligned}$$

Produto Misto – Coplanaridade

O produto misto é nulo nos seguintes casos:

i) se ao menos um vetor é nulo,

ii) se ao menos dois vetores são colineares,

iii) se os três vetores estão no mesmo plano.

Produto Misto – Coplanaridade

O produto misto é nulo nos seguintes casos:

i) se ao menos um vetor é nulo,

ii) se ao menos dois vetores são colineares,

iii) se os três vetores estão no mesmo plano.

- Exemplo:
  Sejam os vetores $\vec{u} = (m, 2, -1)$, $\vec{v} = (1, -1, 3)$ e $\vec{w} = (0, -2, 4)$, determine, caso possível, o valor de m para que a) $\vec{u}$ seja colinear a $\vec{v}$ ou a $\vec{w}$ e b) sejam todos coplanares.