

Vetores e Geometria Analítica – ECT2102  
Lista de Exercícios – Vetores  
Prof. Ronaldo

25 de setembro de 2018

## 1 Vetores

- Dados os pontos  $A(-2, 3, 5)$ ,  $B(1, -2, -2)$  e  $O(0, 0, 0)$  encontre as componentes dos seguintes vetores:
  - $\vec{AB}$  e  $\vec{BA}$
  - $|AB|\vec{AB}$
  - $(|OB| - |BA|)\vec{BA}$
- Dados os vetores  $\vec{u} = (3, -2, 1)$  e  $\vec{v} = (-2, 5, -1)$  encontre as componentes e módulo dos seguintes vetores:
  - $\vec{u} - 2\vec{v}$
  - $\frac{1}{3}\vec{u} + \frac{2}{3}\vec{v}$
  - $-\frac{1}{2}\vec{u} + 2\vec{v}$
  - $2\vec{u} - 2\vec{v} - 4\vec{u}$
- Determine as componentes dos vetores, no espaço  $2D$ , descritos abaixo:
  - Vetor de módulo 2, fazendo um ângulo de  $30^\circ$  com o eixo  $x$  positivo.
  - Vetor a partir do ponto  $A(2, 3)$  até a origem.
  - Vetor a partir do ponto  $A(-1, -3)$  até o ponto  $B(-2, 2)$ .
  - O vetor unitário que faz um ângulo de  $2\pi/3$  com o eixo  $x$  positivo
  - O vetor unitário obtido com a rotação de  $120^\circ$  no sentido anti-horário do vetor  $\vec{v} = (0, 1)$ .
- Um barco atravessa o Rio Potengi, saindo da margem norte e em direção à margem sul, com uma velocidade de  $10\text{km/h}$  em relação à água e fazendo um ângulo de  $30^\circ$  ao leste da linha imaginária que liga a margem norte à sul. Há um brisa do mar para o continente, cuja velocidade é de  $14\text{km/h}$ , com um ângulo de  $45^\circ$  ao norte da linha leste-oeste. Qual o módulo e direção da velocidade vento medido por um anemômetro no barco?
- Encontre os versores associados aos vetores abaixo:
  - $\vec{u} = (2, -1, -2)$
  - $\vec{v} = \hat{i} + \hat{j} + \hat{k}$
  - $\vec{w} = 3\hat{i} - 3\hat{j} - 2\hat{k}$
  - $2\vec{w}$

6. Expresse os vetores abaixo como um produto de seu módulo e direção:
- $2\hat{i} + \hat{j} - 2\hat{k}$
  - $9\hat{i} - 2\hat{j} + 6\hat{k}$
  - $\vec{v} = \vec{AB}$ , onde  $A(-1, 0, 2)$  e  $B(4, 2, 1)$
  - $\vec{w} = \vec{BA} + 2\vec{v}$
7. Determine as componentes do vetor que tem módulo 3 e sentido oposto ao vetor  $\vec{v} = (1/2)\hat{i} - (1/2)\hat{j} - (1/2)\hat{k}$ .
8. Sejam  $\vec{u} = 2\hat{i} + \hat{j}$ ,  $\vec{v} = \hat{i} + \hat{j}$  e  $\vec{w} = \hat{i} - \hat{j}$ . Encontre os escalares  $a$  e  $b$  tais que  $\vec{u} = a\vec{v} + b\vec{w}$

## 2 Produto Escalar

- Determine o ângulo entre os vetores dados abaixo:
  - $\vec{v} = 2\hat{i} - 4\hat{j} + \sqrt{5}\hat{k}$  e  $\vec{u} = -2\hat{i} + 4\hat{j} - \sqrt{5}\hat{k}$
  - $\vec{v} = (3/5)\hat{i} - (4/5)\hat{k}$  e  $\vec{u} = 12\hat{j}$
  - $\vec{v} = (3/5)\hat{i} - (4/5)\hat{k}$  e  $\vec{u} = 5\hat{i} + 12\hat{j}$
  - $\vec{v} = 2\hat{i} + 10\hat{j} - 11\hat{k}$  e  $\vec{u} = 2\hat{i} + 2\hat{j} + \hat{k}$
- A energia cinética de uma partícula é dada por  $K = \frac{1}{2}mv^2$ , onde  $v$  é o módulo de sua velocidade. Qual a expressão de  $K$ , também em função de módulos, quando a velocidade muda de  $\vec{v}$  para  $\vec{v} - \vec{u}$ ?
- Encontre os ângulos internos do triângulo cujos vértices são  $A(-1, 0)$ ,  $B(2, 1)$  e  $C(1, -2)$ .
- Encontre a medida dos ângulos entre as diagonais do retângulo cujos vértices são  $A(1, 0)$ ,  $B(0, 3)$ ,  $C(3, 4)$  e  $D(4, 1)$ .
- Para os pares de vetores dados no exercício 1, determine  $\text{proj}_{\vec{v}}\vec{u}$ .
- Para os vetores dados abaixo, escreva  $\vec{u}$  como a soma de um vetor paralelo e outro ortogonal a  $\vec{v}$ :
  - $\vec{u} = 3\hat{j} + 4\hat{k}$  e  $\vec{v} = \hat{i} + \hat{j}$
  - $\vec{u} = 8\hat{i} + 4\hat{j} - 12\hat{k}$  e  $\vec{v} = \hat{i} + 2\hat{j} - \hat{k}$
- Encontre o trabalho realizado por uma força  $\vec{F} = 5\hat{i} + 2\hat{k}$  ao mover uma partícula entre a origem e o ponto  $P(1, 1, -3)$ .
- Encontre o trabalho realizado por uma força de módulo 30 no sentido de  $A(1, -2, 3)$  para  $B(3, 1, 4)$  ao mover uma partícula entre a origem e o ponto  $B$ .
- Uma caixa está sendo erguida sobre um plano inclinado de  $30^\circ$ . Encontre o vetor força que, aplicado com um ângulo de  $60^\circ$  com a horizontal, produz um trabalho de 200J quando a caixa é elevada por 2m. Qual seria esse vetor força, de mesmo módulo, no mesmo caso, mas quando o trabalho realizado é de  $-200\text{J}$ ?

## 3 Produto Vetorial

- Para os vetores  $\vec{u}$  e  $\vec{v}$  dados abaixo, determine  $\vec{w} = \vec{u} \times \vec{v}$ .
  - $\vec{u} = 2\hat{i} - 2\hat{j} - \hat{k}$  e  $\vec{v} = \hat{i} + \hat{k}$
  - $\vec{u} = 2\hat{i} + 3\hat{j}$  e  $\vec{v} = -\hat{i} + \hat{j}$
  - $\vec{u} = \hat{i} + 4\hat{j} - 2\hat{k}$  e  $\vec{v} = 2\vec{u}$

(d)  $\vec{u} = -\hat{i} + 2\hat{j} - 3\hat{k}$  e  $\vec{v} = -\vec{u} + \hat{i} + \hat{j}$

(e)  $\vec{u} = \hat{i} + 2\hat{j}$  e  $\vec{v} = (\vec{u} \cdot \hat{j})\vec{u} + \hat{k}$

2. Encontre um vetor unitário ortogonal ao plano que contém os pontos

(a)

$$P(-1, 1, 0)$$

$$Q(2, 1, -1)$$

$$R(-1, 1, 2)$$

(b)

$$P(1, -1, 2)$$

$$Q(2, 0, -1)$$

$$R(0, 2, 1)$$

3. Para quais valores de  $a$  os vetores

$$\vec{u} = 2\hat{i} + 4\hat{j} - 5\hat{k}$$

e

$$\vec{v} = -4\hat{i} - 8\hat{j} + a\hat{k}$$

são paralelos?

4. Sejam os vetores

$$\vec{u} = 5\hat{i} - \hat{j} + \hat{k},$$

$$\vec{v} = \hat{j} - 5\hat{k},$$

$$\vec{w} = -15\hat{i} + 3\hat{j} - 3\hat{k}.$$

Quais deles, se é que existem, são perpendiculares e quais são paralelos entre si.

5. Em um determinado sistema de coordenadas, onde a unidade de comprimento é o centímetro, uma chave inglesa prende um parafuso no ponto  $P(10, -10, 20)$  e sua extremidade está no ponto  $Q(20, 0, 40)$ .

(a) Qual é o módulo do torque produzido por uma força de magnitude 100N aplicada na extremidade da chave inglesa, fazendo um ângulo de  $60^\circ$  com seu cabo?

(b) Qual é o ganho percentual no módulo do torque ao aplicar uma força de mesma magnitude com um ângulo de  $90^\circ$  com o cabo da chave?

## 4 Produto Misto

1. Dados os vetores

$$\vec{u} = a\hat{i} + 5\hat{j},$$

$$\vec{v} = 3\hat{i} - 2\hat{j} + \hat{k}$$

e

$$\vec{w} = \hat{i} + \hat{j} - \hat{k},$$

determine o valor de  $a$  para que o volume do paralelepípedo dado por  $\vec{u}$ ,  $\vec{v}$  e  $\vec{w}$  seja 24 u.v.

2. Dados os pontos  $A(1, -2, 3)$ ,  $B(2, -1, -4)$ ,  $C(0, 2, 0)$  e  $D(-1, m, 1)$ , determinar o valor de  $m$  para que seja de 20u.v. o volume do paralelepípedo determinado pelo vetores  $\vec{AB}$ ,  $\vec{AC}$  e  $\vec{AD}$

3. Determine  $m$  para que três vetores abaixo sejam coplanares e, baseado nos resultados, interprete quais as possíveis orientações angulares entre estes vetores.

$$\vec{u} = \hat{i} - m\hat{j} + 2\hat{k},$$

$$\vec{v} = 2\hat{i} + 6\hat{j} + 4\hat{k},$$

$$\vec{w} = -\hat{i} + 3\hat{j} - m\hat{k}.$$

4. Determine se os pontos  $A(1, 1, 1)$ ,  $B(-2, -1, -3)$ ,  $C(0, 2, -2)$  e  $D(-1, 0, -2)$  estão num mesmo plano.