Vetores e Geometria Analítica – ECT2102

Prof. Ronaldo Carlotto Batista

7 de agosto de 2018

AVISO

O propósito fundamental destes slides é servir como um guia para as aulas. Portanto eles não devem ser entendidos como referência de texto didático. O assunto aqui apresentado pode ser encontrado em detalhes no livro **Álgebra Linear com Aplicações, Anton & Rorres, Capítulos 1 e 2**

Sistemas Lineares

- Uma equação algébrica linear em x é da forma:

$$ax = b\,,$$

Estaremos interessados em $a, b, x \in \mathbb{R}$. **AT1:** Mostre que esse tipo de equação sempre tem solução.

Sistemas Lineares

- Uma equação algébrica linear em x é da forma:

$$ax = b\,,$$

Estaremos interessados em $a, b, x \in \mathbb{R}$. **AT1:** Mostre que esse tipo de equação sempre tem solução.

- Um sistema de duas equações algébricas lineares nas variáves x e y é da forma:

$$\begin{cases} ax + by & = c \\ dx + ey & = f \end{cases}$$

AT2: Encontre a solução geral desse sistema, identificando as condições para sua existência.

Sistemas Lineares

- Uma equação algébrica linear nas variáveis x_i é uma equação do tipo:

$$\sum_i a_i x_i = b \,, \tag{1}$$

onde vamos assumir a_i e b como constantes reais.

Sistemas Lineares

- Uma equação algébrica linear nas variáveis x_i é uma equação do tipo:
$$\sum_i a_i x_i = b\,, \tag{1}$$
onde vamos assumir a_i e b como constantes reais.

- Um sistema de equações (algébricas) lineares é um conjunto de equações do tipo (1). Por exemplo, um sistema linear genérico com n incógnitas e m equações tem a forma:
$$\left\{\begin{array}{rcl} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + \ldots a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n & = & b_m \end{array}\right. . \tag{2}$$
Note que os coeficientes a recebem um segundo índice. O primeiro está associado ao número de equações (m) e o segundo os número de incógnitas (n).

Sistemas Lineares

- Um sistema linear é dito **homogêneo** se, para qualquer índice i, temos $b_i = 0$. Neste caso, o sistema sempre possui a solução $x_i = 0$, para todo i, a qual é chamada de solução trivial.
- Se ao menos um b_i é diferente de zero, o sistema é dito **não homogêneo**.

Sistemas Lineares

Em relação às soluções, um sistema linear pode apresentar:

- Uma única solução, neste caso é dito **possível e determinado**.
- Várias soluções, neste caso é dito **possível e indeterminado.**
- Nenhuma solução, neste caso é dito **impossível** ou **inconsistente.**

Sistemas Lineares

Sistemas lineares aparecem em inúmeras áreas da matemática, engenharia, ciências exatas e sociais .

- Exemplo 1:
  Quando 100 sacas de trigo são distribuídas entre 100 pessoas, de modo que cada homem receba 3 sacas, cada mulher 2 e cada criança $\frac{1}{2}$ saca, qual é o número de homens, mulheres e crianças que participaram da distribuição?

Sistemas Lineares

Sistemas lineares aparecem em inúmeras áreas da matemática, engenharia, ciências exatas e sociais .

- Exemplo 1:
  Quando 100 sacas de trigo são distribuídas entre 100 pessoas, de modo que cada homem receba 3 sacas, cada mulher 2 e cada criança $\frac{1}{2}$ saca, qual é o número de homens, mulheres e crianças que participaram da distribuição?

- Exemplo 2:
  Determine, caso exista, o ponto em comum das funções reais $f_1(x) = 1 + 2x$ e $f_2(x) = 2 + 2x$.

Sistemas Lineares

Sistemas lineares aparecem em inúmeras áreas da matemática, engenharia, ciências exatas e sociais .

- Exemplo 1:
  Quando 100 sacas de trigo são distribuídas entre 100 pessoas, de modo que cada homem receba 3 sacas, cada mulher 2 e cada criança $\frac{1}{2}$ saca, qual é o número de homens, mulheres e crianças que participaram da distribuição?

- Exemplo 2:
  Determine, caso exista, o ponto em comum das funções reais $f_1(x) = 1 + 2x$ e $f_2(x) = 2 + 2x$.

- Exemplo 3:
  Determine, caso exista, o ponto em comum das funções reais $f_1(x) = 1 + 2x$ e $f_2(x) = 2 + 3x$.

Sistemas Lineares

Para resolver um sistema linear, podemos efetuar as seguintes operações algébricas:

1. Multiplicar as equações por constante não nula.
2. Somar múltiplo de equações.

Note também que a ordem em que as equações são expressas não é relevante para encontrar as soluções. Desta forma também podemos reordenar as equações livremente.

Sistemas Lineares - Notação Matricial

Neste curso, vamos identificar uma matriz como um coleção de elementos numéricos listada em uma tabela de até duas dimensões. Alguns exemplos são:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} c_{11} \\ c_{21} \\ c_{31} \\ c_{41} \end{pmatrix}.$$

Em geral, uma matriz $m \times n$ tem a forma:

$$A_{m\times n} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Seus elementos são indexados por a_{ij}, onde $i = 1, 2, 3 \dots m$ é o índice de linha e $j = 1, 2, 3 \dots n$ é o índice de coluna.

Sistemas Lineares - Notação Matricial

Veja que podemos expressar os coeficientes do sistema linear (2) em forma de matriz, que é chamada de **matriz aumentada** do sistema:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & & & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}.$$

É extremamente útil perceber que as operações algébricas efetuadas em um sistema linear podem ser representadas como operações realizadas na matriz aumentada.

Sistemas Lineares - Notação Matricial

- Exemplo 1
  Escreva a matriz aumentada do sistema e resolva-o manipulando-a.

$$\begin{aligned} x + y &= 9 \\ 2x + 3y &= 1 \end{aligned}$$

Sistemas Lineares - Notação Matricial

- Exemplo 1
  Escreva a matriz aumentada do sistema e resolva-o manipulando-a.
$$\begin{aligned} x + y &= 9 \\ 2x + 3y &= 1 \end{aligned}$$

- Exemplo 2
  Escreva a matriz aumentada do sistema e resolva-o manipulando-a.
$$\begin{aligned} x + y + 2z &= 9 \\ 2x + 4y - 3z &= 1 \\ 3x + 6y - 5z &= 0 \end{aligned}$$

Sistemas Lineares - Eliminação Gauss-Jordan

No exemplo anterior, a solução foi expressa pela seguinte matriz, em **forma escalonada reduzida por linhas:**

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

O método de eliminação de Gauss-Jordan é um algorítimo capaz de expressar as possíveis soluções de um sistema na forma de uma matriz escalonada.

Sistemas Lineares - Gauss-Jordan

O algorítmo é o seguinte:

1. Caso necessário, permute as linhas para que o elemento a_{11} seja não nulo. Caso exista uma ou mais colunas nulas à esquerda, faça o processo para a primeira coluna não nula.
2. Multiplique a primeira linha por uma constante de forma a obter $a_{11} = 1$. Este elemento é identificado como um pivô.
3. Some múltiplos da primeira linha às demais linhas de forma a conseguir todos $a_{i1} = 0$.
4. Desconsiderando a primeira linha, repita o processo para as demais linhas, gerando novos pivôs.
5. Some múltiplos de uma linha às outras de forma que todos os elementos acima dos pivôs sejam anulados.

Sistemas Lineares - Gauss-Jordan

- Exemplo 1:
  Utilizando o processo de eliminação de Gauss-Jordan, expresse a matriz abaixo em forma escalonada reduzida por linha e interprete o resultado como solução de um sistema linear.

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 & 0 & 7 & 12 \\ 2 & 4 & -10 & 6 & 12 & 28 \\ 2 & 4 & -5 & 6 & -5 & -1 \end{pmatrix}$$

Sistemas Lineares - Gauss-Jordan

- Exemplo 1:
  Utilizando o processo de eliminação de Gauss-Jordan, expresse a matriz abaixo em forma escalonada reduzida por linha e interprete o resultado como solução de um sistema linear.

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 & 0 & 7 & 12 \\ 2 & 4 & -10 & 6 & 12 & 28 \\ 2 & 4 & -5 & 6 & -5 & -1 \end{pmatrix}$$

- Exemplo 2:
  Resolva o seguinte sistema usado o método de Gauss-Jordan.

$$\begin{aligned} x_1 + 3x_2 - 2x_3 + 2x_5 &= 0 \\ 2x_1 + 6x_2 - 5x_3 - 2x_4 + 4x_5 - 3x_6 &= -1 \\ 5x_3 + 10x_4 + 15x_6 &= 5 \\ 2x_1 + 6x_2 + 8x_4 + 4x_5 + 18x_6 &= 6 \end{aligned}$$

Sistemas Lineares - Gauss-Jordan

A solução do sistema do exemplo 2 pode ser representada pela seguinte matriz escalonada reduzida por linhas:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 4 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Sistemas Lineares Homogêneos

Um sistema homogêneo sempre tem ao menos uma solução, a trivial. Portanto, **um sistema homogêneo é sempre possível**: ou tem uma única solução (a trivial), ou a trivial mais outras.
Caso o sistema homogêneo tenha mais incógnitas que equações, ele apresentará uma **infinidade de soluções**.

Sistemas Lineares Homogêneos

Um sistema homogêneo sempre tem ao menos uma solução, a trivial. Portanto, **um sistema homogêneo é sempre possível**: ou tem uma única solução (a trivial), ou a trivial mais outras.
Caso o sistema homogêneo tenha mais incógnitas que equações, ele apresentará uma **infinidade de soluções**.

- Exemplo 1:
  Resolva o seguinte sistema homogêneo usando método de Gauss-Jordan.

$$\begin{aligned}
x_1 + 3x_2 - 2x_3 + 2x_5 &= 0\\
2x_1 + 6x_2 - 5x_3 - 2x_4 + 4x_5 - 3x_6 &= 0\\
5x_3 + 10x_4 + 15x_6 &= 0\\
2x_1 + 6x_2 + 8x_4 + 4x_5 + 18x_6 &= 0
\end{aligned}$$

Igualdade de Matrizes

Duas matrizes A e B, de mesmo tamanho, $m \times n$, são ditas iguais quando todos seus elementos são iguais, isto é,

$$a_{ij} = b_{ij}$$

para todos os índices $i = 1, 2, 3..., m$ e $j = 1, 2, 3...n$. Por exemplo, as matrizes

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \text{ e } B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & x \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

são iguais somente se $x = 2$.

Operações matriciais

1. Soma:
   Seja $C = A + B$, com A e B de mesmas dimensões, a soma entre as matrizes A e B. Os elementos de C são dados por
   $$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}\,.$$
2. Multiplicação por escalar:
   Seja $B = c\,A$, com A uma matriz e c uma constante real. Os elementos de B são dados por:
   $$b_{ij} = c\,a_{ij}\,.$$
3. Multiplicação de matrizes:
   Sejam $A_{m\times r}$ e $B_{r\times n}$, a matriz $C_{m\times n} = AB$ representa a multiplicação entre A e B e seus elementos são dados por
   $$c_{ij} = \sum_{k=1}^{r} a_{ik}\,b_{kj}$$

Matriz Transposta, Identidade e Traço

- **Matriz Transposta:** seja $A_{m \times n}$, sua matriz transposta é denominada $A^T_{n \times m}$ seus elementos são dados por:

$$a^T_{ij} = a_{ji} \, .$$

Matriz Transposta, Identidade e Traço

- **Matriz Transposta:** seja $A_{m\times n}$, sua matriz transposta é denominada $A^T_{n\times m}$ seus elementos são dados por:

$$a^T_{ij} = a_{ji}\ .$$

- **Matriz Identidade, I,** é uma matriz quadrada com todos elemetentos nulos, exceto os de sua diagonal, que são todos iguais a 1. Por exemplo, podemos representar uma matriz identidade 8×8 por:

$$I = diag\left(1,1,1,1,1,1,1,1\right)\ .$$

Os elementos da Identidade podem ser representados com o Delta de Kronecker:

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{se } i = j \\ 0, & \text{se } i \neq j \end{cases}$$

Operações matriciais

- **Traço de Matriz:** seja uma matriz quadrada A_{ij} $n \times n$, seu traço é dado por

$$tr\left(A\right) = \sum_{k=1}^{n} a_{kk} \; .$$

Operações matriciais

- **Traço de Matriz:** seja uma matriz quadrada A_{ij} $n \times n$, seu traço é dado por

$$tr\,(A) = \sum_{k=1}^{n} a_{kk}\ .$$

- Ex. 1:
  Determine, caso possível, as multiplicações AB e BA das matrizes dadas abaixo.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \text{ e } B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$$

Operações matriciais

- **Traço de Matriz:** seja uma matriz quadrada A_{ij} $n \times n$, seu traço é dado por

$$tr\,(A) = \sum_{k=1}^{n} a_{kk}\ .$$

- Ex. 1:
  Determine, caso possível, as multiplicações AB e BA das matrizes dadas abaixo.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \text{ e } B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$$

- Ex.2
  Seja uma matriz $A_{n\times n}$ e I_n, determine AI e IA.

Propriedades Algébricas

TEOREMA 1.4.1 Propriedades da aritmética matricial

Supondo que os tamanhos das matrizes sejam tais que as operações indicadas possam ser efetuadas, valem as seguintes regras da aritmética matricial.

(a) $A + B = B + A$ **[Lei da comutatividade da adição]**

(b) $A + (B + C) = (A + B) + C$ **[Lei da associatividade da adição]**

(c) $A(BC) = (AB)C$ **[Lei da associatividade da multiplicação]**

(d) $A(B + C) = AB + AC$ **[Lei da distributividade à esquerda]**

(e) $(A + B)C = AC + BC$ **[Lei da distributividade à direita]**

(f) $A(B - C) = AB - AC$

(g) $(B - C)A = BA - CA$

(h) $a(B + C) = aB + aC$

(i) $a(B - C) = aB - aC$

(j) $(a + b)C = aC + bC$

(k) $(a - b)C = aC - bC$

(l) $a(bC) = (ab)C$

(m) $a(BC) = (aB)C = B(aC)$

Matriz Inversa

Seja uma matriz quadrada A, denotamos, caso exista, sua matriz inversa por A^{-1}, que é tal que:

$$AA^{-1} = A^{-1}A = I \,.$$

Quando A^{-1} existe dizemos que a matriz A é **invertível**, do contrário dizemos que A é **não invertível** ou **singular**.

Matriz Inversa

Seja uma matriz quadrada A, denotamos, caso exista, sua matriz inversa por A^{-1}, que é tal que:

$$AA^{-1} = A^{-1}A = I\,.$$

Quando A^{-1} existe dizemos que a matriz A é **invertível**, do contrário dizemos que A é **não invertível** ou **singular**.

- Exemplo:
  Sejam as matrizes

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \text{ e } B = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

  Verifique se uma é a inversa da outra.

Matriz Inversa

Podemos usar o conceito de matriz inversa para resolvermos um sistema linear. Consideremos, por exemplo, um sistema do tipo

$$\begin{array}{rcl} ax+by & = & k_1 \\ cx+dy & = & k_2 \end{array}.$$

Note que ele pode expresso na forma de multiplicação matricial:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \end{pmatrix}.$$

Chamando

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix},$$

a solução do sistema é dada por:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = A^{-1}\begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \end{pmatrix}$$

Matriz Inversa, caso 2×2

A inversa de uma matriz 2×2

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix},$$

é dada por

$$A^{-1} = \frac{1}{det\,(A)} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix},$$

onde

$$det\,(A) = ad - bc$$

é o determinante da matriz A.

Matriz Inversa

Teorema

Se A e B são matrizes invertíveis de mesmo tamanho, então a matriz AB é invertível e

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}\,.$$

Definição

Potências de uma matriz quadrada:

$$A^0 = I\,, \quad A^n = AA...A \text{ n fatores}$$

$$A^{-n} = \left(A^{-1}\right)^n$$

Matriz Inversa

Teorema

Se A é uma matriz não singular, então:

i) A^{-1} é invertível e $\left(A^{-1}\right)^{-1} = A$,

ii) A^n é invertível e $(A^n)^{-1} = A^{-n} = \left(A^{-1}\right)^n$,

iii) kA é invertível e $(kA)^{-1} = k^{-1}A^{-1}$.

iv) $\left(A^T\right)^{-1} = \left(A^{-1}\right)^T$.

Matrizes Elementares

Definição

Uma matriz que pode ser obtida atravéz de uma única operação elementar sobre a matriz identidade é dita uma Matriz Elementar.

Matrizes Elementares

Definição

Uma matriz que pode ser obtida atravéz de uma única operação elementar sobre a matriz identidade é dita uma Matriz Elementar.

Teorema

Qualquer matriz elementar é invertível e sua inversa é também uma matriz elementar.

Matrizes Elementares

Definição

Uma matriz que pode ser obtida atravéz de uma única operação elementar sobre a matriz identidade é dita uma Matriz Elementar.

Teorema

Qualquer matriz elementar é invertível e sua inversa é também uma matriz elementar.

Facto

As operações elementares podem ser representadas por multiplicações de matrizes elementares.

Encontrando matrizes inversas com operações elementares

Se uma matriz A é não singular, vale a seguinte equação:

$$AA^{-1} = I\,,$$

a qual pode ser operada multiplicada por n matrizes elementares até que

$$\left(E_n \dots E_2 E_1 A\right) A^{-1} = IA^{-1}\,,$$

com o que a inversa é dada por

$$A^{-1} = \left(E_n \dots E_2 E_1\right) I\,.$$

Matrizes Elementares e a Inversa

- Exemplo 1:
  Usando operações elementares, determine a inversa de

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Matrizes Elementares e a Inversa

- Exemplo 1:
  Usando operações elementares, determine a inversa de

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

- Exemplo 2:
  Usando operações elementares, determine a inversa de

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 3 \\ 1 & 0 & 8 \end{pmatrix}.$$

Determinantes

Definição

O determinante de uma matriz 2×2,

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix},$$

é dado por

$$det\,(A) = a_{11}\,a_{22} - a_{21}\,a_{12}\,.$$

Determinantes

Definição

Expansão de Laplace: Seja A uma matriz $n \times n$, seu determinante é dado por:

$$det\,(A) = \sum_{i/j=1}^{n} a_{ij} C_{ij} \,,$$

onde

$$C_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$$

é o cofator do elemento a_{ij} e M_{ij} é o menor da matriz A, dado pelo determinante da matriz obtida com a eliminação da linha i e da coluna j de A.

Determinantes

Definição

Expansão de Laplace: Seja A uma matriz $n \times n$, seu determinante é dado por:

$$det\,(A) = \sum_{i/j=1}^{n} a_{ij}\,C_{ij}\ ,$$

onde

$$C_{ij} = (-1)^{i+j}\,M_{ij}$$

é o cofator do elemento a_{ij} e M_{ij} é o menor da matriz A, dado pelo determinante da matriz obtida com a eliminação da linha i e da coluna j de A.

- Exemplo:
  Encontre a expressão geral para o determinante de uma matriz 3×3 utilizando os cofatores da primeira linha.

Determinantes

Teorema

Se A é uma matriz $n \times n$ triangular superior ou inferior, seu determinante é dado por

$$det\,(A) = \prod_{k=1}^{n} a_{kk}\,.$$

Propriedades do Determiante

A seguir listamos algumas propriedade úteis dos determinantes.

i) Se B é o resultado da multiplicação de uma linha de A por uma constante k, então $det\left(B\right) = kdet\left(A\right)$.

ii) Se B é o resulta de uma permutação das linhas ou colunas de A, então $det\left(B\right) = -det\left(A\right)$.

iii) Se B é o resultado da soma de um múltiplo ou de linha ou coluna de A a outra linha ou coluna de A, então $det\left(B\right) = det\left(A\right)$.

iv) $det\left(A\right) = det\left(A^T\right)$.

v) Se $B = kA$, então $det\left(B\right) = k^n det\left(A\right)$.

vi) Se A e B diferem por uma única linha e $C = A + B$, então $det\left(C\right) = det\left(A\right) + det\left(B\right)$.

vii) $det\left(AB\right) = det\left(A\right) det\left(B\right)$.

viii) Se A é não singular $det\left(A^{-1}\right) = \frac{1}{det(A)}$.

Determinantes e redução por linhas

Usando as propriedades do determinante, podemos operar uma matriz até encontrar sua forma triangular superior ou inferior, e assim determinar facilmente seu determinante.

Determinantes e redução por linhas

Usando as propriedades do determinante, podemos operar uma matriz até encontrar sua forma triangular superior ou inferior, e assim determinar facilmente seu determinante.

- Exemplo:
  Utilizando a redução por linhas, encontre o determinante da matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 5 \\ 3 & -6 & 9 \\ 2 & 6 & 1 \end{pmatrix}.$$

Determinantes e operações com linhas/colunas

Outra possibilidade é operar somar múltiplos de linhas/colunas à outras linhas/colunas a fim de conseguir uma matriz com simples expansão em cofatores.

Determinantes e operações com linhas/colunas

Outra possibilidade é operar somar múltiplos de linhas/colunas à outras linhas/colunas a fim de conseguir uma matriz com simples expansão em cofatores.

- Exemplo:
  Encontre o determinante da matriz

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 5 & -2 & 6 \\ 1 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & 4 & 1 & 5 \\ 3 & 7 & 5 & 3 \end{pmatrix}.$$

Determinante, Matriz Adjunta e Matriz Inversa

Teorema

Uma matriz quadrada A é invertível se e somente se $\det(A) \neq 0$.

Determinante, Matriz Adjunta e Matriz Inversa

Teorema

Uma matriz quadrada A é invertível se e somente se $\det(A) \neq 0$.

Definição

Seja A uma matriz $n \times n$, os elementos de sua matriz adjunta, denotada por $adj\,(A)$, são dados pela transposta da matriz de cofatores de C_{ij} de A.

Determinante, Matriz Adjunta e Matriz Inversa

Teorema

Uma matriz quadrada A é invertível se e somente se $det\,(A) \neq 0$.

Definição

Seja A uma matriz $n \times n$, os elementos de sua matriz adjunta, denotada por $adj\,(A)$, são dados pela transposta da matriz de cofatores de C_{ij} de A.

Teorema

Se A é uma matriz invertível, então

$$A^{-1} = \frac{1}{det\,(A)}\, adj\,(A)$$

Regra de Cramer

Teorema

Seja um sitema linear, $Ax = b$, com n equações e n incógnitas, tal que a matriz dos coeficientes das incógnitas, A, tenha $\det(A) \neq 0$ e sejam as matrizes A_j obtidas pela substituição de sua coluna j pelo vetor de coeficientes livres, b, então a solução do sistema é dada por:

$$x_j = \frac{\det(A_j)}{\det(A)}.$$

Regra de Cramer

Teorema

Seja um sitema linear, $Ax = b$, com n equações e n incógnitas, tal que a matriz dos coeficientes das incógnitas, A, tenha $\det(A) \neq 0$ e sejam as matrizes A_j obtidas pela substituição de sua coluna j pelo vetor de coeficientes livres, b, então a solução do sistema é dada por:

$$x_j = \frac{\det(A_j)}{\det(A)}.$$

- Exemplo:
  Usando a regra de Cramer, encontre a solução do sistema.

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_3 &= 6 \\ -3x_1 + 4x_2 + 6x_3 &= 30 \\ -x_1 - 2x_2 + 3x_3 &= 8 \end{aligned}$$