VGA – ECT2102
Lista de Exercícios – Sistemas, Matrizes e Determinantes
Prof. Ronaldo Batista

7 de agosto de 2018

1 Sistemas Lineares

Determine, caso existam, as soluções dos seguintes sistemas:

1.

$$\begin{aligned} x + y &= 0 \\ 2x + y &= 1 \end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned} 2x + 4y &= 6 \\ x + 2y &= 3 \end{aligned}$$

3.

$$\begin{aligned} x + 2y &= 1 \\ 2x + 4y &= 4 \end{aligned}$$

4.

$$\begin{aligned} x + z &= 1 \\ 2y + 2z &= 4 \\ x + 2z &= 0 \end{aligned}$$

5.

$$\begin{aligned} x + 2z &= 1 \\ x + y + 2z &= 3 \\ 2x + y + 4z &= 2 \end{aligned}$$

6.

$$\begin{aligned} x + 2z &= 0 \\ x + y + 2z &= 0 \\ 2x + y + 4z &= 0 \end{aligned}$$

7.

$$\begin{aligned} x + 2y + 3z &= 1 \\ x + 3y + 3z &= 3 \\ 2x + 5y + 6z &= 4 \end{aligned}$$

8.

$$\begin{aligned} x_2 + 2x_3 + x_4 &= 0 \\ x_1 + 2x_2 + x_4 &= 3 \\ x_1 + 3x_3 + x_4 &= 4 \\ -2x_2 - 4x_3 - 2x_4 &= 0 \\ 3x_3 + x_4 &= 2 \end{aligned}$$

9.

$$\begin{aligned} \textstyle\sum_{i=1}^{6} i x_i &= 6 \\ \textstyle\sum_{i=1}^{5} i x_i &= 5 \\ \textstyle\sum_{i=1}^{4} i x_i &= 4 \\ \textstyle\sum_{i=1}^{3} i x_i &= 3 \\ \textstyle\sum_{i=1}^{2} i x_i &= 2 \\ \textstyle\sum_{i=1}^{1} i x_i &= 1 \end{aligned}$$

2 Algumas aplicações de sistemas lineares

1. A função $f(x) = ax+b$ passa pelos pontos $P_1(x_1, y_1)$ e $P_2(x_2, y_2)$. Determine os coeficientes a e b em função das coordenadas dos pontos dados.

2. A função $f(x) = ax^2 + bx + c$ passa pelos seguintes pontos $P_1(1, 0)$, $P_2(2, 0)$ e $P_3(3, -2)$. Determine os coeficientes a, b e c em função das coordenadas dos pontos dados.

3. Determine se é possível que uma parábola passe pelos pontos $P_1(0, 3)$, $P_2(2, 4)$,$P_1(-2, 2)$.

4. A função $f(x) = ax^3 + bx^2 + c$ passa pelos seguintes pontos $P_1(1, 0)$, $P_2(2, 0)$ e $P_3(3, -2)$. Determine os coeficientes a, b e c em função das coordenadas dos pontos dados.

5. 100 sacas de trigo são distribuídas entre 100 pessoas, de modo que cada homem receba 3 sacas, cada mulher 2 e cada criança $\frac{1}{2}$ saca. Qual é o número, não nulo, de homens, mulheres e crianças que participaram da distribuição sabendo que o número de crianças foi o maior possível?

3 Eliminação de Gauss-Jordan

Usando o processo de eliminação de Gauss-Jordan, determine a forma linha reduzida das seguintes matrizes:

1.
$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

2.
$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix}$$

3.
$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

4.
$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

5.
$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

6.
$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

7.
$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

4 Álgebra matricial

1. Sejam as matrizes $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$, determine:

   (a) $A + B$

   (b) AB

   (c) BA

(d) BA^T

(e) B^3

(f) $tr\,(A)\,tr\,(B)$

(g) $tr\,(2A)B$

2. Sejam as matrizes

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & x \end{pmatrix} \text{ e } B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & -3 \end{pmatrix},$$

determine x tal que $tr\,(AB) = 0$.

3. Considere as matrizes

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & -3 \end{pmatrix} \text{ e}$$

$$C = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Determine os resultados de todas as possíveis multiplicações de duas a duas e de três a três.

4. Sabe-se que, em geral, o produto de duas matrizes não comuta. Definindo o comutador entre duas matrizes como

$$[A, B] = AB - BA,$$

podemos dizer que se duas matrizes comutam temos $[A, B] = 0$, note que aqui temos a matriz nula.

(a) Para a matriz $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, determine, caso exista, a matriz mais geral to tipo $B = \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & y \end{pmatrix}$ que comuta com A.

(b) Para a matriz $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, determine, caso exista, a matriz mais geral to tipo $B = \begin{pmatrix} x & x \\ 0 & y \end{pmatrix}$ que comuta com A.

(c) Para a matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, determine, caso exista, a matriz mais geral to tipo $B = \begin{pmatrix} x & x \\ 0 & y \end{pmatrix}$ que comuta com A.

(d) Para a matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, determine, caso exista, a matriz mais geral to tipo $B = \begin{pmatrix} x & 1 \\ y & 0 \end{pmatrix}$ que comuta com A.

5 Matriz inversa

1. Determine a inversa da matriz

$$A = \begin{pmatrix} \cos\theta & \text{sen}\theta \\ -\text{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix}.$$

Determine e interprete geometricamente os resultados das multiplicações $A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ e $A^{-1}A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.

2. Para a matriz A do exercício anteriror, determine θ tal que o "vetor" $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ se transforme em $\begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix}$ e o valor de a.

3. Para as matrizes abaixo, determine, caso existam suas matrizes inversas, caso não exista justifique.

(a)

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$$

(b)

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

(c)

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -4 & 4 \end{pmatrix}$$

(d)

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -4 & 3 & 0 \\ -0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

(e)

$$\begin{pmatrix} x^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & x & 0 \\ 0 & 0 & x^{-1} \end{pmatrix}, \text{ com } x \neq 0 \text{ e} \in \mathbb{R}$$

(f)

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 3 & 5 & 0 \end{pmatrix}$$

(g)

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 2 & -3 & 5 & 0 \end{pmatrix}$$

4. Mostre que se uma matriz $A_{n\times n}$ é não singular, então o sistema homogêneo $A\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = 0$ tem somente a solução trivial.

5. Mostre que se um sistema

$$A\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = b\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

tem apenas a solução trivial, onde A é uma matriz $n \times n$ e b é uma constante, então a matriz $B = A - Ib$ tem inversa.

6. Para o sistema linear a seguir

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 5 \\ 2x_1 + 5x_2 + 3x_3 &= 3 \\ x_1 + 8x_3 &= 17 \end{aligned}$$

determine a matriz A, tal que sua solução seja expressa por

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 17 \end{pmatrix}.$$

Qual é a relação da matriz A com a matriz

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 3 \\ 1 & 0 & 8 \end{pmatrix}?$$

7. Seja a matriz

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 5 \\ 1 & -3 \end{pmatrix},$$

determine:

(a) A^{-2}

(b) AA^{-3}

(c) $A^{-3}A$

(d) A^nA^{-n-1}

(e) $A^{-2}\left(A + A^{-1}\right)A$

6 Determinantes

1. Obtenha, caso existam, o valor dos determinantes das seguintes matrizes.

   (a) $A = \begin{pmatrix} -2 & 5 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$, A^2 e AA^T.

   (b) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$, $2A$ e A^{-2}.

   (c) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ e $A\left(-2I + A^{-1}\right)$.

   (d) $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -3 & -1 & 0 \\ 1 & 4 & 0 & 0 & 1 \\ 3 & 3 & -3 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & -3 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, A^3 e $3A^{-1}$.

2. Usando a expansão de Laplace, expresse os determinantes das matrizes $n \times n$ abaixo em função de apenas um determinante de matriz $(n-1) \times (n-1)$, como o determinate de uma matriz triangular, encontrando seu valores

   (a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 6 \end{pmatrix}$

   (b) $\begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

   (c) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 4 & 5 \\ -1 & -2 & -3 & 1 \end{pmatrix}$

   (d) $\begin{pmatrix} 2 & -3 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 6 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 7 & 0 & 1 \\ 1 & -3 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 6 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

3. Para as matrizes abaixo, determine os valores de x e y para que sua inversa exista.

   (a) $\begin{pmatrix} 1 & x \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$

   (b) $\begin{pmatrix} 5y & 3x \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$

   (c) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & y \\ 0 & x & 2 \\ 1 & 2 & -2+y \end{pmatrix}$

   (d) $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & x & 2 \\ -3 & 1 & x \end{pmatrix}$

   (e) $\begin{pmatrix} -1 & 0 & y \\ 1 & x & 2 \\ -3 & 1 & x \end{pmatrix}$

4. Para os sistemas da seção 1, determine quais podem ser resolvidos pela regra de Cramer e encontre novamente suas soluções usando esse método.

5. Determine sob que condições um sistema do tipo $Ax = \lambda x$, onde λ é uma constante, tem soluções não triviais.

6. Para o sistema abaixo, utilizando a regra de Cramer, determine o valor de x_4.

$$\begin{aligned} \textstyle\sum_{i=1}^{6} i^2 x_i &= 6 \\ \textstyle\sum_{i=1}^{5} i^2 x_i &= 5 \\ \textstyle\sum_{i=1}^{4} i^2 x_i &= 4 \\ \textstyle\sum_{i=1}^{3} i^2 x_i &= 3 \\ \textstyle\sum_{i=1}^{2} i^2 x_i &= 2 \\ \textstyle\sum_{i=1}^{1} i^2 x_i &= 1 \end{aligned}$$