Vetores e Geometria Analítica – ECT2102

Prof. Ronaldo Carlotto Batista

14 de outubro de 2019

Círculo

Definição

Círculo é o conjunto de pontos $P\,(x, y)$ a uma distância a, chamada de raio, de um ponto $C\,(x_o, y_0)$, chamado de centro.

Da definição, sabemos que

$$|PC| = a\,,$$

portando a equação do círculo é da forma:

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = a^2\,.$$

Superfície esférica

Uma superfície esféria não é uma seção cônica, contudo trata-se de uma generalização elementar do círculo para um espaço tridimensional e de uso muito frequente. Sua equação é:

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = a^2 \ .$$

Superfície esférica

Uma superfície esféria não é uma seção cônica, contudo trata-se de uma generalização elementar do círculo para um espaço tridimensional e de uso muito frequente. Sua equação é:

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = a^2 \ .$$

- Exemplo 1:
  Encontre o centro da superfície esférica definida pela equação
  $$x^2 + y^2 + z^2 + 3x - 4z + 1 = 0$$

Superfície esférica

Uma superfície esféria não é uma seção cônica, contudo trata-se de uma generalização elementar do círculo para um espaço tridimensional e de uso muito frequente. Sua equação é:

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = a^2 \, .$$

- Exemplo 1:
  Encontre o centro da superfície esférica definida pela equação
  $$x^2 + y^2 + z^2 + 3x - 4z + 1 = 0$$

Resposta:

$$C\left(-3/2, 0, 2\right) \quad \text{e} \quad a = \sqrt{21}/2$$

- Exemplo 2:
  Encontre o centro da superfície esférica definida pela equação
  $$3x^2 + 3y^2 + 3z^2 + 2y - 2z - 9 = 0$$

Superfície esférica

Uma superfície esféria não é uma seção cônica, contudo trata-se de uma generalização elementar do círculo para um espaço tridimensional e de uso muito frequente. Sua equação é:

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = a^2 \ .$$

- Exemplo 1:
  Encontre o centro da superfície esférica definida pela equação

$$x^2 + y^2 + z^2 + 3x - 4z + 1 = 0$$

Resposta:

$$C\left(-3/2, 0, 2\right) \quad \text{e} \quad a = \sqrt{21}/2$$

- Exemplo 2:
  Encontre o centro da superfície esférica definida pela equação

$$3x^2 + 3y^2 + 3z^2 + 2y - 2z - 9 = 0$$

Resposta:

$$C\left(0, -1/3, 1/3\right) \quad \text{e} \quad a = \sqrt{29}/3$$

Parábola

Definição

Parábola é o conjunto de pontos $P(x, y)$ equidistantes de um ponto $F(x_0, y_0)$, chamado foco, e uma reta, chamada diretriz .

Parábola

Definição

Parábola é o conjunto de pontos $P\,(x, y)$ equidistantes de um ponto $F\,(x_0, y_0)$, chamado foco, e uma reta, chamada diretriz .

- Exemplo 1:
  Mostre que uma parábola com foco $F\,(x_0, y_o + p)$ tem a seguinte equação:

$$(y - y_0) = \frac{(x - x_0)^2}{4p}.$$

Neste caso o valor p é chamado de distância focal, o ponto $V\,(x_0, y_0)$ de vértice, e a reta $y = y_0 - p$ é a diretriz.

Elipse

Definição

Elipse é o conjunto de pontos $P(x, y)$ cuja soma das distâncias a dois pontos fixos, chamados de focos, é constante.

Aguns elementos importantes da elipse são:

1. Distância focal: é a distância entre os focos, $2c$.
2. Centro: é o ponto médio do segmento que liga os focos.
3. Eixo maior: é a distância entre os pontos da elipse que também pertencem à reta que liga os dois focos, $2a$.
4. Eixo menor: é a distância entre os pontos da elipse que pertencem à reta perpendicular à reta que liga os focos e passa pelo centro, $2b$.
5. Vértices: são os dois pares de pontos da elipse definidos em 4 e 5.
6. Excentricidade é a razão entre distância focal e o eixo maior, $e = c/a$.

Elipse

Da definição da elipse sabemos que

$$|F_1P| + |F_2P| = 2a\,,$$

onde $2a$ é comprimento eixo maior.

Elipse

Da definição da elipse sabemos que

$$|F_1P| + |F_2P| = 2a\,,$$

onde $2a$ é comprimento eixo maior.

- Exemplo:
  Determine a equação da elipse com focos $F_1\,(c, 0)$ e $F_2\,(-c, 0)$. Deduza a relação $a^2 = b^2 + c^2$ para escrever a equação em função dos eixos maior e menor.

Elipse

Da definição da elipse sabemos que

$$|F_1P| + |F_2P| = 2a\,,$$

onde $2a$ é comprimento eixo maior.

- Exemplo:
  Determine a equação da elipse com focos $F_1\,(c,0)$ e $F_2\,(-c,0)$. Deduza a relação $a^2 = b^2 + c^2$ para escrever a equação em função dos eixos maior e menor.

Resp.

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1$$

Translação de eixos

A equação da elipse deduzida no exemplo anterior assume que seu centro está na orgiem do sistema de coordenadas. Uma alternativa prática para deduzir a equação de uma elipse (ou círculo) com centro em um ponto arbitrário é realizar uma translação de eixos do sistema de coordenadas. Seja S' um novo sistema, transladado horizontalmente h e verticalmente k, então temos a seguinte transformação de coordenadas $P(x,y) \to P(x',y')$, onde

$$\begin{cases} x' = & x - h \\ y' = & y - k \end{cases}$$

Translação de eixos

A equação da elipse deduzida no exemplo anterior assume que seu centro está na orgiem do sistema de coordenadas. Uma alternativa prática para deduzir a equação de uma elipse (ou círculo) com centro em um ponto arbitrário é realizar uma translação de eixos do sistema de coordenadas. Seja S' um novo sistema, transladado horizontalmente h e verticalmente k, então temos a seguinte transformação de coordenadas $P\left(x, y\right) \to P\left(x', y'\right)$, onde

$$\begin{cases} x' = & x - h \\ y' = & y - k \end{cases}$$

- Exemplo:
  Determine a equação da elipse com centro $C\left(2, 1\right)$, eixo maior 3 e eixo menor 2.

Hipérbole

Definição

Hipérbole é o conjunto de pontos $P(x, y)$ cujo módulo da diferença das distâncias a dois pontos fixos, chamados de focos, têm diferença constante.

Figura da Wikipedia (by GuidoB)

Hipérbole

Aguns elementos importantes da hipérbole são:

1. Distância focal: é a distância entre os focos, $2c$.
2. Centro: é o ponto médido do segmento que liga os focos.
3. Vértices: são os pontos da hipébole que também pertecem à reta que liga os focos.
4. Eixo real ou transverso: é o segmento que liga os vértices, $2a$.
5. Eixo imaginário: é o segmento que liga dois pontos numa reta perpendicular ao eixo real, que passa pelo centro, distantes b do centro, onde é determinado por $c^2 = a^2 + b^2$.
6. Excentricidade é a razão entre distância focal e o eixo maior, $e = c/a$

Com isso, sabemos que os pontos da hipérbole satisfazem a seguinte equação

$$|F_1P| - |F_2P| = \pm 2a$$

Hipérbole

- Exemplo 1:
  Determine a equação da hipérbole que têm focos nos pontos $F_1\left(-c, 0\right)$ e $F_1\left(c, 0\right)$

Hipérbole

- Exemplo 1:
  Determine a equação da hipérbole que têm focos nos pontos $F_1\left(-c,0\right)$ e $F_1\left(c,0\right)$
- Exemplo 2:
  Determine a equação da hipérbole que têm focos nos pontos $F_1\left(0,c\right)$ e $F_1\left(0,-c\right)$

Retas

Lembremos que a equação da reta é dada por:

$$f(x) = ax + b\,,$$

onde

$$b = f(0)$$

e

$$a = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \tan\theta\,,$$

onde θ é o ângulo que a reta faz com o eixo x.

Retas no Espaço

No espaço podemos definir a reta como uma linha que passa por um dado $P_0\left(x_0, y_0, z_0\right)$ e que seja paralela a um dado vetor $\vec{v} = v_1\hat{i} + v_2\hat{j} + v_3\hat{k}$. Então a reta é formada pelo conjunto de pontos $P\left(x, y, z\right)$ para os quais o vetor $\overrightarrow{P_0P}$ é paralelo ao vetor $\vec{v}$, isto é,

$$\overrightarrow{P_0P} = t\vec{v}\,.$$

Retas no Espaço

No espaço podemos definir a reta como uma linha que passa por um dado $P_0\left(x_0, y_0, z_0\right)$ e que seja paralela a um dado vetor $\vec{v} = v_1\hat{i} + v_2\hat{j} + v_3\hat{k}$. Então a reta é formada pelo conjunto de pontos $P\left(x, y, z\right)$ para os quais o vetor $\vec{P_0P}$ é paralelo ao vetor $\vec{v}$, isto é,

$$\vec{P_0P} = t\vec{v}\,.$$

Definindo $\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$ e $\vec{r_0} = x_0\hat{i} + y_0\hat{j} + z_0\hat{k}$, podemos expressar a equação da reta na forma

$$\vec{r}\left(t\right) = \vec{r_0} + t\vec{v}\,.$$

Retas no Espaço

Igualando as componentes vetoriais da expressão anterior, podemos encontrar as equações paramétricas da reta:

$$\begin{cases} x = x_0 + tv_1 \\ y = y_0 + tv_2 \\ z = z_0 + tv_3 \end{cases}$$

Retas no Espaço

Igualando as componentes vetoriais da expressão anterior, podemos encontrar as equações paramétricas da reta:

$$\begin{cases} x & = & x_0 + tv_1 \\ y & = & y_0 + tv_2 \\ z & = & z_0 + tv_3 \end{cases}$$

- Exemplo 1:
  Encontre as equações paramétricas para a reta que passa pelo ponto $P_0\,(-2,0,4)$ e é paralela ao vetor $\vec{v} = 2\hat{i} + 4\hat{j} - 2\hat{k}$.

Retas no Espaço

Igualando as componentes vetoriais da expressão anterior, podemos encontrar as equações paramétricas da reta:

$$\begin{cases} x &= x_0 + tv_1 \\ y &= y_0 + tv_2 \\ z &= z_0 + tv_3 \end{cases}$$

- Exemplo 1:
  Encontre as equações paramétricas para a reta que passa pelo ponto $P_0\,(-2, 0, 4)$ e é paralela ao vetor $\vec{v} = 2\hat{i} + 4\hat{j} - 2\hat{k}$.

- Exemplo 2:
  Encontre as equações paramétricas para a reta que passa pelos pontos $P\,(-3, 2, -3)$ e $Q\,(1, -1, 4)$. Para quais valores do parâmetro t a reta liga os pontos P e Q?

Distância entre ponto e reta

A distância entre um ponto S até uma reta que passa por um ponto P e é paralela a um vetor $\vec{v}$ é dada por

$$d = \frac{|\vec{PS} \times \vec{v}|}{|\vec{v}|}$$

Distância entre ponto e reta

A distância entre um ponto S até uma reta que passa por um ponto P e é paralela a um vetor $\vec{v}$ é dada por

$$d = \frac{|\vec{PS} \times \vec{v}|}{|\vec{v}|}$$

- Exemplo:
  Encontre a distância entre o ponto $S\,(1, 1, 5)$ e a reta

$$\begin{cases} x & = & 1 + t \\ y & = & 3 - t \\ z & = & 2t \end{cases}$$

Equação do Plano

Um plano pode ser definido por um ponto $P_0\,(x_0, y_0, z_0)$, que pertence ao plano, e um vetor $\vec{n} = A\hat{i} + B\hat{j} + C\hat{k}$ normal ao plano, que definine sua inclinação. Então todos os pontos $P\,(x, y, z)$ que satisfaçam a seguinte equação pertencem ao plano

$$\overrightarrow{P_0P} \cdot \vec{n} = 0\,.$$

Equação do Plano

Um plano pode ser definido por um ponto $P_0\left(x_0, y_0, z_0\right)$, que pertence ao plano, e um vetor $\vec{n} = A\hat{i} + B\hat{j} + C\hat{k}$ normal ao plano, que definine sua inclinação. Então todos os pontos $P\left(x, y, z\right)$ que satisfaçam a seguinte equação pertencem ao plano

$$\overrightarrow{P_0P} \cdot \vec{n} = 0\,.$$

Essa equação vetorial pode ser escrita na forma:

$$A\left(x - x_0\right) + B\left(y - y_0\right) + C\left(z - z_0\right) = 0$$

Equação do Plano

- Exemplo 1:
  Encontre a equação do plano que passa pelo ponto $P_0\,(0,1,2)$ e é normal ao vetor $\vec{n} = 3\hat{j}$. Determine 3 pontos que pertencem a esse plano.

Equação do Plano

- Exemplo 1:
  Encontre a equação do plano que passa pelo ponto $P_0\,(0,1,2)$ e é normal ao vetor $\vec{n} = 3\hat{j}$. Determine 3 pontos que pertencem a esse plano.

- Exemplo 2:
  Encontre a equação do plano que passa pelo ponto $P_0\,(-3,0,7)$ e é normal ao vetor $\vec{n} = 5\hat{i} + 2\hat{j} - \hat{k}$.

Equação do Plano

- Exemplo 1:
  Encontre a equação do plano que passa pelo ponto $P_0\,(0,1,2)$ e é normal ao vetor $\vec{n} = 3\hat{j}$. Determine 3 pontos que pertencem a esse plano.

- Exemplo 2:
  Encontre a equação do plano que passa pelo ponto $P_0\,(-3,0,7)$ e é normal ao vetor $\vec{n} = 5\hat{i} + 2\hat{j} - \hat{k}$.

- Exemplo 3:
  Encontre a equação do plano que passa pelos pontos

$$A\,(0,0,1)$$
$$B\,(2,0,0)$$
$$C\,(0,3,0)$$

Planos – Interseção entre Reta e Plano

Exemplo: Encontre o ponto de interseção entre a reta

$$\begin{cases} x &= 8/3 + 2t \\ y &= -2t \\ z &= 1 + t \end{cases}$$

e o plano

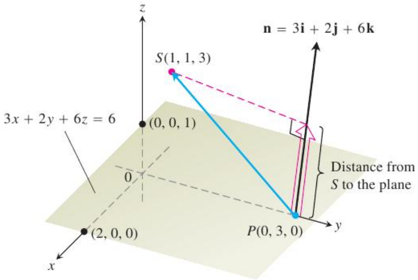
$$3x + 2y + 6z = 6\,.$$

Distância entre Ponto e Plano

A distância entre um ponto S e um plano M, que tem vetor normal $\vec{n}$ é dada por

$$d = \frac{|\vec{PS} \cdot \vec{n}|}{|\vec{n}|},$$

onde P é um ponto que pertence ao plano M.



Distância entre Ponto e Plano

- Exemplo 1:
  Encontre a distância entre o ponto $S(1, 1, 3)$ e o plano

$$3x + 2y + 6z = 6\,.$$

Distância entre Ponto e Plano

- Exemplo 1:
  Encontre a distância entre o ponto $S\,(1,1,3)$ e o plano
  $$3x + 2y + 6z = 6\,.$$

- Exemplo 2:
  Encontre a distância entre o ponto $S\,(1,1,3)$ e o plano
  $$z = 0\,.$$

Ângulo entre Planos

Podemos encontrar o ângulo entre dois planos fazendo uso do produto escalar entre os vetores normais. Temos que

$$\theta = \arccos\left(\frac{\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2}{|\vec{n}_1||\vec{n}_2|}\right).$$

Ângulo entre Planos

Podemos encontrar o ângulo entre dois planos fazendo uso do produto escalar entre os vetores normais. Temos que

$$\theta = \arccos\left(\frac{\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2}{|\vec{n}_1||\vec{n}_2|}\right).$$

- Exemplo 1:
  Encontre o ângulo entre os planos:

$$M_1 : \;\; 3x - 6y - 2z = 15$$

$$M_2 : \;\; 2x + y - 2z = 5$$

Ângulo entre Planos

Podemos encontrar o ângulo entre dois planos fazendo uso do produto escalar entre os vetores normais. Temos que

$$\theta = \arccos\left(\frac{\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2}{|\vec{n}_1||\vec{n}_2|}\right).$$

- Exemplo 1:
  Encontre o ângulo entre os planos:

$$M_1 : \; 3x - 6y - 2z = 15$$

$$M_2 : \; 2x + y - 2z = 5$$

- Exemplo 2:
  Encontre a equação do plano que passa pelo ponto $S = (3, 1, -4)$ e é paralelo ao plano

$$M : \; 2x - 3y + z = 6$$