Gabarito das questões discursivas da P1

October 16, 2023

Questão 5:

Utilizando a expansão de Laplace, mostre que o determinante de uma matriz $A_{4\times 4}$ cujos elementos $a_{ij} = 0$ para $j > i$ é dada por $\prod_{k=1}^{4} a_{kk}$.

Solução:

Por definição, a matriz A é da forma:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & 0 \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix} .$$

Fazendo uma expansão de cofatores na primeira linha (outra opção igualmente conveniente seria na quarta coluna) temos:

$$det\,(A) = \sum_{j=1}^{4} a_{1j} c_{1j} = a_{11} c_{11} \,,$$

onde

$$c_{11} = (-1)^2 \begin{vmatrix} a_{22} & 0 & 0 \\ a_{32} & a_{13} & 0 \\ a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} = a_{22} a_{33} a_{44} \,.$$

Portanto

$$det\,(A) = a_{11} a_{22} a_{33} a_{44} = \prod_{k=1}^{4} a_{kk} \,.$$

Questão 6:

Determine sob que condições a matriz A dada abaixo não tem inversa, onde x é uma constante real.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & x & 2 & 0 \\ 1 & 0 & x & 0 \\ -3 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Solução:

Sabendo que uma matriz tem inversa se e somente se $det\,(A) \neq 0$, devemos determinar x tal que $det\,(A) = 0$. Podemos facilmente calcular o determinante de A com uma expansão em cofatores na coluna 4:

$$det\,(A) = \sum_{i=1}^{4} a_{i4} c_{i4} = a_{44} c_{44} = c_{44}\,,$$

onde

$$c_{44} = (-1)^8 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & x & 2 \\ 1 & 0 & x \end{vmatrix} = x^2 - 2x\,.$$

Então, resolvendo $det\,(A) = 0$ encontraremos os valores de x para os quais A não tem inversa:

$$x^2 - 2x = 0$$

$$x \in \{0, 2\}\,.$$