N1 VETORES E GEOMETRIA ANALÍTICA

SISTEMAS LINEARES

* Uma eq. e uma incógnita (x)

$$ax + b = c$$

soma de $-b$

$$ax + b - b = c - b$$

$$ax = c - b$$

multiplicação de $\frac{1}{a}$

$$\frac{1}{a} \cdot ax = \frac{1}{a} \cdot (c - b)$$

$$x = \frac{c-b}{a}$$ Solução

* Duas eqs. e duas incógnitas (x, y).

$$\begin{cases} ax + by = c & (\mathrm{I}) \\ dx + ey = f & (\mathrm{II}) \end{cases}$$

Isolando y em II: $dx + ey = f$

$$dx - dx + ey = f - dx$$

$$ey = f - dx$$

$$\frac{1}{e} \cdot ey = \frac{1}{e} \cdot (f - dx)$$

$$y = \frac{f - dx}{e}$$

Inserindo y em I: $ax + by = c$

$$ax + b \cdot \frac{(f - dx)}{e} = c$$

$$ax + \frac{bf}{e} - \frac{bd}{e}x = c$$

$$\left(a - \frac{bd}{e}\right)x = c - \frac{bf}{e}$$

$$\left(\frac{ae - bd}{e}\right)x = \frac{ce - bf}{e}$$

Solução para x: $$x = \frac{ce - bf}{ae - bd}$$

Solução para y: $$y = \frac{f - dx}{e} = \frac{1}{e}\left(f - \frac{d(ce - bf)}{ae - bd}\right)$$

$$y = \frac{1}{e}\left(\frac{fae - \cancel{fdb} - dce + \cancel{dbf}}{ae - db}\right) \Rightarrow y = \frac{fa - dc}{ae - db}$$

Note que ambas soluções apresentam $ae - bd$ no denominador.

$$\begin{cases} ax + by = c \\ dx + ey = f \end{cases} \rightarrow A = \begin{pmatrix} a & b \\ d & e \end{pmatrix} \rightarrow \det A = ae - bd$$

Ou seja, para que o sistema tenha solução única devemos ter $\det A \neq 0$.

<u>Ex. 1</u>
$$\begin{cases} 2x + y = 3 \ (\mathrm{I}) \Rightarrow y = 3 - 2x \\ -6x - 3y = 0 \ (\mathrm{II}) \end{cases}$$

$\mathrm{I} \to \mathrm{II}$: $\quad -6x - 3(3-2x) = 0$

$$-\cancel{6x} - 9 + \cancel{6x} = 0 \Rightarrow -9 = 0 \quad \text{Absurdo!}$$

Note que $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -6 & -3 \end{pmatrix}$, $\det A = -6 + 6 = 0$.

Logo esse sistema não tem solução.

<u>Ex. 2</u>
$$\begin{cases} 2x + y = 3 \Rightarrow y = 3 - 2x \\ -6x - 3y = -9 \end{cases}$$

$\mathrm{I} \to \mathrm{II}$: $\quad -6x - 3(3-2x) = -9 \Rightarrow -9 = -9$ Verdade, mas não traz info.

A matriz A é a mesma, mas aqui II e múltiplo de I $(-3 \cdot \mathrm{I} = \mathrm{II})$, portanto não temos duas eqs. independentes.

Na verdade, esse sistema tem infinitas soluções

$$y = 3 - 2x$$

//

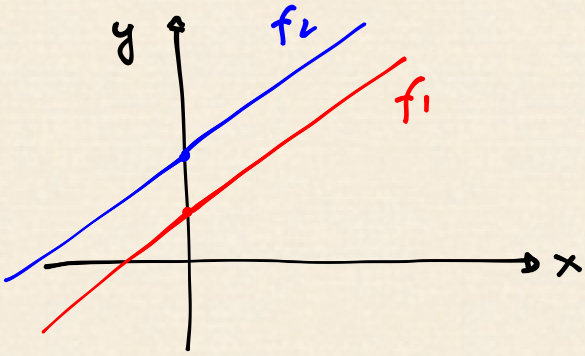
N2

Ex. 2 (Slides) Ponto em comum entre

$$f_1(x) = 1 + 2x \quad e \quad f_2(x) = 2 + 2x.$$

Note que, como funções reais, são retas paralelas.

Logo, não há ponto em comum.



Em termos de um sistema linear, temos:

$$\left.\begin{cases} f_1(x) = y \\ f_2(x) = y \end{cases}\right\}$$ supondo haver um mesmo y para um x.

FALSO

$$\Rightarrow \begin{cases} 1 + 2x = y & (\mathrm{I}) \\ 2 + 2x = y & (\mathrm{II}) \end{cases}$$

Substituindo y de (I) em (II), temos:

$$2 + 2x = 1 + 2x$$

$$2 = 1 \quad \text{Absurdo!}$$

Ex. 3 (Slides)

Mesmo que o anterior, mas com $f_1(x) = 1 + 2x$ e $f_2(x) = 1 + 3x$.

$$\begin{cases} f_1(x) = y \\ f_2(x) = y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1 + 2x = y \\ 1 + 3x = y \end{cases} \Rightarrow 1 + 3x = 1 + 2x$$

$$\Rightarrow x = 0 \;//$$

Note que $f_1(x=0) = 1$ e $f_2(x=0) = 1$, como esperado pela solução.

OPERAÇÕES PERMITIDAS

Para resolver sistemas lineares, podemos fazer as seguintes operações:

1. Multiplicar equações por constante não nula.
2. Somar múltiplos de equações a outras eqs.

Ex. 1

$$\begin{cases} 3x - y = -1 & (I) \\ 2x - y = -1 & (II) \end{cases}$$

$(I) - (II) \Rightarrow 3x - y - 2x + y = -1 + 1$

$\Rightarrow x = 0$

$x = 0$ em (I) ou (II) $\Rightarrow y = 1$.

Solução $x = 0$ e $y = 1$. Note que é o mesmo sist. do exemplo anterior.

Ex. 2

$$\begin{cases} x - 3y = 2 & (I) \\ 2x + y = 0 & (II) \end{cases}$$

$(II) - 2(I)$:

$$\begin{array}{r} 2x + y = 0 \\ -2x + 6y = -4 \\ \hline 7y = -4 \end{array}$$

$y = -4/7$

$y = -\frac{4}{7}$ em (II): $2x - \frac{4}{7} = 0 \Rightarrow x = \frac{2}{7}$

Solução $x = 2/7$ e $y = -4/7$.

(N3) # MATRIZES ELEMENTARES

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$L_1 \to L_1 + 2L_2 \Rightarrow E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ São matrizes

$L_2 \to L_2 - L_1 \Rightarrow E_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ elementares.

$L_1 \to \frac{1}{3} L_1 \Rightarrow E_3 = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Inversa das elementares.

E_3^{-1} $\exists$? Se sim, $E_3^{-1} E_3 = I$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3a & b \\ 3c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} a = 1/3 , & b = 0 \\ c = 0 , & d = 1 \end{matrix}$$

$$E_3^{-1} = \begin{pmatrix} 1/3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$E_2^{-1}\ \exists$? Se sim, $E_2^{-1} E_2 = I$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} a-b & b \\ c-d & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow b=0,\ d=1$$

$$a=1,\ c=1$$

$$E_2^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$ Verifique que $E_2^{-1} E_2 = I$.

Note que E_2^{-1} realiza a operação elementar $L_2 \to L_2 + L_1$, que é a operação inversa da usada para gerar E_2.

N4

PRODUTO VETORIAL

$$\vec{u} \times \vec{v} = |\vec{u}||\vec{v}| \operatorname{sen}\theta \, \hat{n}$$

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix}$$

↳ Versor dado pela regra da mão direita.

Ex.1 $\vec{u} = (2,1,1)$, $\vec{v} = (-4,3,1)$

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 2 & 1 & 1 \\ -4 & 3 & 1 \end{vmatrix} = \hat{i} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} - \hat{j} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -4 & 1 \end{vmatrix} + \hat{k} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -4 & 3 \end{vmatrix}$$

$$\vec{u} \times \vec{v} = \hat{i}(1-3) - \hat{j}(2+4) + \hat{k}(6+4)$$

$$\vec{u} \times \vec{v} = -2\hat{i} - 6\hat{j} + 10\hat{k}$$

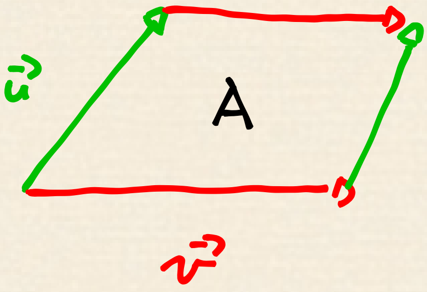
Ângulo entre $\vec{u}$ e $\vec{u} \times \vec{v}$:

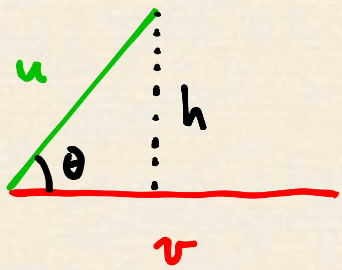
$$\vec{u} \cdot (\vec{u} \times \vec{v}) = (2,1,1) \cdot (-2,-6,10)$$

$$= -4 - 6 + 10 = 0 \Rightarrow \vec{u} \perp \vec{u} \times \vec{v}.$$

Verifique que $\vec{v}$ também é ortogonal a $\vec{u} \times \vec{v}$.

Área do paralelogramo

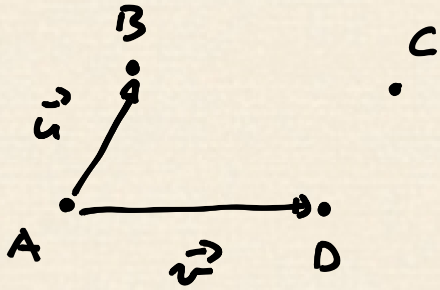




$A = b \cdot h = |\vec{v}|\,|\vec{u}|\operatorname{sen}\theta$

$$\boxed{A = |\vec{u} \times \vec{v}|}$$

Ex.1 Área do paralelogramo com vértices $A(0,0)$, $B(\sqrt{3}, 1/2)$, $C(3+\sqrt{3}, 1/2)$ e $D(3,0)$



$\vec{u} = \vec{AB} = (\sqrt{3}, 1/2)$

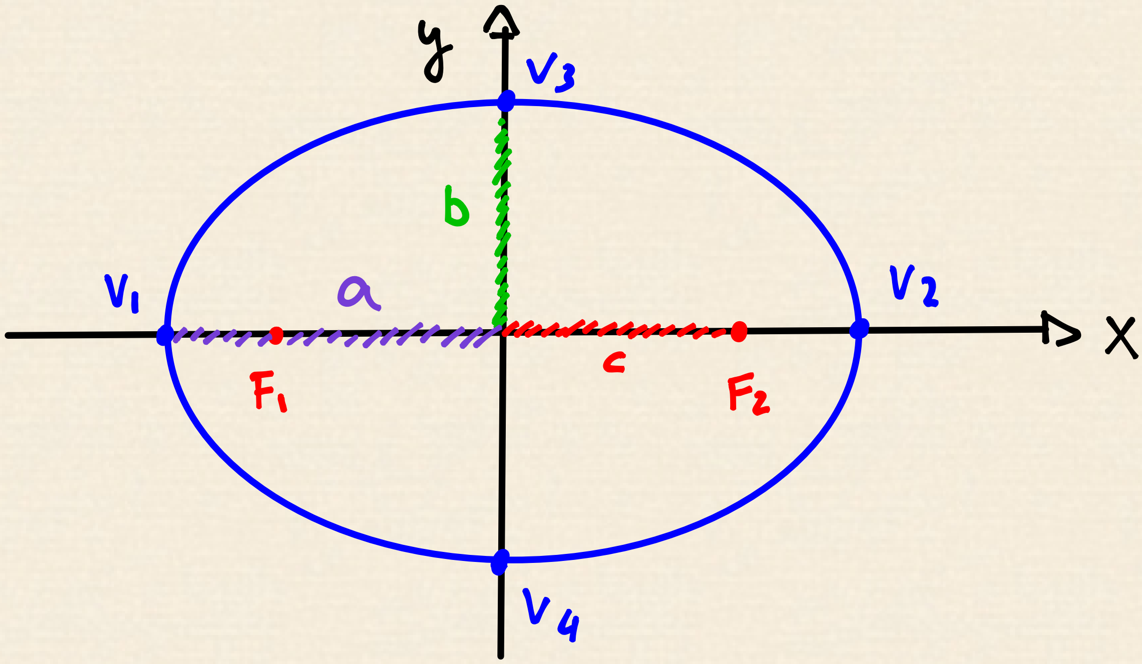
$\vec{v} = \vec{AD} = (3, 0)$

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \sqrt{3} & 1/2 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \hat{k} \begin{vmatrix} \sqrt{3} & 1/2 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} = -\frac{3}{2}\hat{k}$$

$$A = |\vec{u} \times \vec{v}| = \left|-\frac{3}{2}\hat{k}\right| = \frac{3}{2} \text{ u.a.} \;//$$

N5

ELIPSE



2a - eixo maior

2b - eixo menor

2c - distância focal

Todos os pontos $P(x,y)$ da elipse devem satisfazer

$$|PF_1| + |PF_2| = 2a$$

Para $V_3(0,b)$, temos:

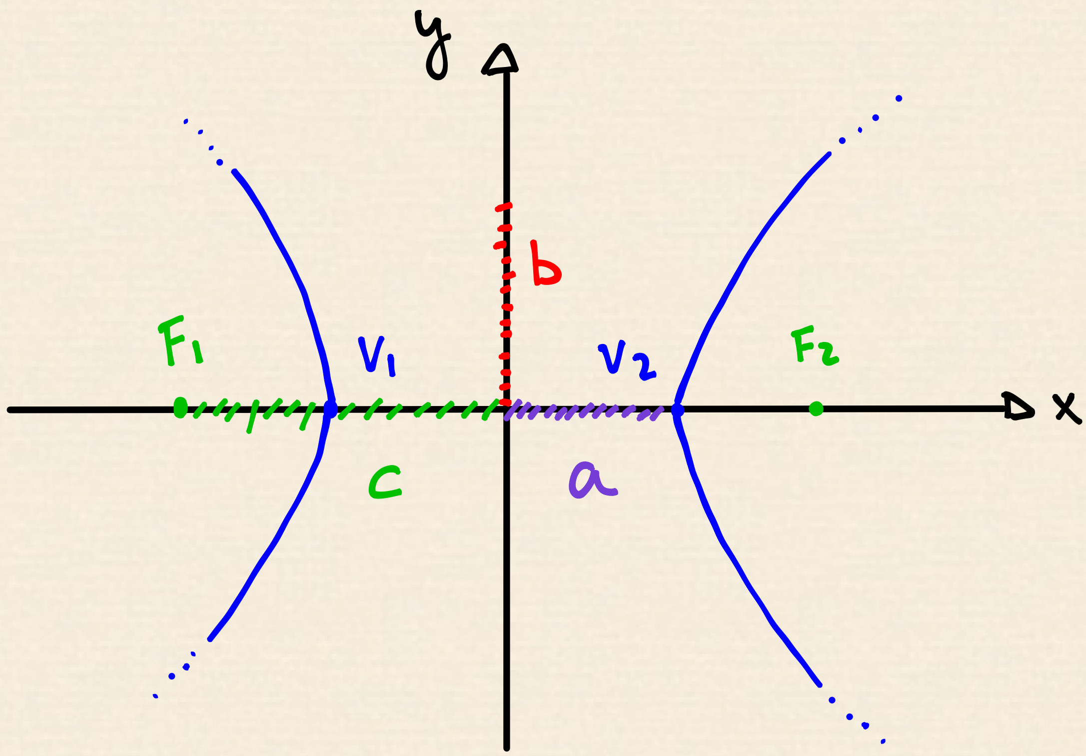
$$|V_3F_1| + |V_3F_2| = 2a$$

$$\sqrt{c^2+b^2} + \sqrt{c^2+b^2} = 2a \Rightarrow \boxed{a^2 = b^2 + c^2}$$

Para $P(x,y)$, após alguma álgebra, temos

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 .$$

HIPÉRBOLE



2a – eixo real

2b – eixo imaginário

2c – distância focal

O valor de b é tal que $\boxed{c^2 = a^2 + b^2}$.

Os pontos $P(x,y)$ da hipérbole devem satisfazer $|PF_1| - |PF_2| = \pm 2a$. Com alguma álgebra temos a equação desta hipérbole:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$