

RESPOSTA ATIVIDADE 4 - Sistema de dois níveis

a) Função de partição canônica e energia livre de H.

$$H = \sum_{i=1}^N t_i \epsilon, \quad t_i \in \{0, 1\}, \quad Z = \sum_{\{t_i\}} \exp(-\beta H)$$

$$Z = \sum_{\{t_i\}} \exp[-\beta \epsilon (t_1 + t_2 + \dots + t_N)] = \left[\exp(0) + \exp(-\beta \epsilon) \right]^N$$

$$Z = \left[1 + e^{-\beta \epsilon} \right]^N //$$

$$f = -\frac{1}{\beta} \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \ln Z = -\frac{1}{\beta} \ln(1 + e^{-\beta \epsilon})$$

$$f(T) = -k_B T \ln \left[1 + \exp\left(-\frac{\epsilon}{k_B T}\right) \right] //$$

(b) Entropia específica, $df = -s dT$

$$-s = \frac{\partial f}{\partial T} = -k_B \ln \left[1 + \exp\left(-\frac{\epsilon}{k_B T}\right) \right] - \frac{k_B T \left(\frac{\epsilon}{k_B T^2} \right) \exp\left(-\frac{\epsilon}{k_B T}\right)}{1 + \exp\left(-\frac{\epsilon}{k_B T}\right)}$$

$$s = k_B \ln \left[1 + \exp\left(-\frac{\epsilon}{k_B T}\right) \right] + \frac{\epsilon}{T} \frac{\exp\left(-\epsilon/k_B T\right)}{1 + \exp\left(-\epsilon/k_B T\right)} //$$

c) no limite $\epsilon \rightarrow \infty$

$$s = k_B \ln \left[1 + \exp\left(-\frac{\epsilon}{k_B T}\right) \right] + \frac{\epsilon}{T} \frac{\exp(-\epsilon/k_B T)}{1 + \exp(-\epsilon/k_B T)}$$

$$X = -\frac{\epsilon}{k_B T}, \quad \epsilon \rightarrow \infty \Rightarrow X \rightarrow -\infty$$

$$\lim_{X \rightarrow -\infty} s(X) = k_B \ln(1) + \lim_{X \rightarrow -\infty} k_B X \frac{e^X}{1 + e^X}$$

Para $\epsilon \rightarrow \infty$, $s \rightarrow 0$

Se $\epsilon \rightarrow \infty$, o sistema só pode acenar o estado de energia zero, logo, com apenas um estado acessível,

temos $s = k_B \ln(1) = 0$.

O estado com $\epsilon \rightarrow \infty$ é, de fato, inacessível pois sua probabilidade é

$$P = \lim_{\epsilon \rightarrow \infty} \frac{\exp(-\beta \epsilon)}{Z} = 0$$