

Notas de aula - Relatividade

Prof. Ronaldo Carlotto Batista

May 12, 2026

1 Revisão da Mecânica Newtoniana

Quantidade elementares:

- posição de uma partícula: $\vec{r}(t) = (x(t), y(t), z(t)) = x(t)\hat{i} + y(t)\hat{j} + z(t)\hat{k}$
- velocidade: $\vec{v} = \frac{d}{dt}\vec{r} = \dot{x}\hat{i} + \dot{y}\hat{j} + \dot{z}\hat{k}$
- momento linear de uma partícula com massa m : $\vec{p} = m\vec{v}$
- aceleração: $\vec{a} = \frac{d^2}{dt^2}\vec{r} = \frac{d}{dt}\vec{v} = \ddot{x}\hat{i} + \ddot{y}\hat{j} + \ddot{z}\hat{k}$

Leis de Newton:

1. Quando $\sum \vec{F} = \vec{0}$, $\vec{a} = 0$ (define referencial inercial, Referenciais de Galileu)
2. $\vec{F} = \frac{d}{dt}\vec{p}$ (equação de movimento em referencial inercial)
3. $\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$ (ação e reação)

No caso de uma partícula com massa constante: $\vec{F} = m\vec{a}$.

Transformação de Galileu: relaciona coordenadas entre referenciais inerciais S e S' , que se move com velocidade $\vec{V} = V\hat{x}$ em relação a S . Se as origens dos sistemas coincidem em $t = 0$, temos:

$$\begin{aligned}t &= t' \\x &= x' + Vt' \\y &= y' \\z &= z'\end{aligned}\tag{1}$$

Adição de velocidades:

$$v_x = \frac{dx}{dt} = \frac{dx'}{dt'} + V \Rightarrow v_x = v'_x + V.\tag{2}$$

Nesse caso, as velocidades nas direções y e z são idênticas. No caso geral, temos

$$\vec{v} = \vec{v}' + \vec{V}.\tag{3}$$

Admitindo que a massa de uma partícula e a força que age sobre ela são invariantes sob TGs, a Segunda Lei de Newton é covariante frente às TGs. Em S , temos:

$$\vec{F} = m\vec{a} \quad (4)$$

Utilizando a TG, temos

$$\vec{a} = \frac{d}{dt} (v'_x + V, v'_y, v'_z) = (a'_x, a'_y, a'_z) = \vec{a}' . \quad (5)$$

Então

$$\vec{F} = m\vec{a} \Rightarrow \vec{F}' = m\vec{a}' , \quad (6)$$

ou seja, a Segunda Lei de Newton é covariante (tem a mesma forma) frente a troca de referenciais ligados por TG.

Referenciais acelerados

Considerando um movimento em duas dimensões, a posição de uma partícula é dada por

$$\vec{r} = r(t)\hat{r} , \quad (7)$$

onde \hat{r} é o vetor unitário que liga a origem do sistema de coordenadas à posição da partícula e $r(t)$ a distância associada. Na posição da partícula, definimos uma base ortonormal com dois vetores \hat{r} e $\hat{\theta}$. A velocidade da partícula é dada por

$$\vec{v} = \frac{d}{dt} (r(t)\hat{r}) = \frac{dr(t)}{dt}\hat{r} + r(t)\frac{d\hat{r}}{dt} . \quad (8)$$

Por construção geométrica, pode-se mostrar que

$$\frac{d\hat{r}}{dt} = \frac{d\theta}{dt}\hat{\theta} . \quad (9)$$

Então

$$\vec{v} = \frac{dr(t)}{dt}\hat{r} + r\frac{d\theta}{dt}\hat{\theta} . \quad (10)$$

Nessa expressão, fica aparente a componente radial e tangencial da velocidade. Em especial, uma partícula em movimento circular com raio constante, r_0 , terá apenas velocidade tangencial $\vec{v} = r_0\frac{d\theta}{dt}\hat{\theta}$.

Para determinar a aceleração, precisamos também calcular a derivada temporal de $\hat{\theta}$. Também por construção geométrica, temos

$$\frac{d\hat{\theta}}{dt} = -\frac{d\theta}{dt}\hat{r} . \quad (11)$$

Assim,

$$\vec{a} = \left[\frac{d^2r}{dt^2} - r \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 \right] \hat{r} + \left[r \frac{d^2\theta}{dt^2} + 2r \frac{dr}{dt} \frac{d\theta}{dt} \right] \hat{\theta} , \quad (12)$$

ou ainda

$$\vec{a} = \left[\frac{d^2 r}{dt^2} - r \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 \right] \hat{r} + \left[\frac{1}{r} \frac{d}{dt} \left(r^2 \frac{d\theta}{dt} \right) \right] \hat{\theta}. \quad (13)$$

Note que, no caso de um movimento circular, a aceleração também tem componentes radial e tangencial. Na superfície da Terra por exemplo, com raio e velocidade de rotação constante, existe uma aceleração não nula. Logo, a superfície da Terra não é um referencial inercial.

Na prática, para aplicações que não requerem grande precisão e/ou em intervalos de tempo curtos, essa aceleração devido à rotação da Terra pode ser desprezada. Contudo, em geral, tal aceleração deve ser considerada para determinar as trajetórias de interesse, o que é essencial para balística, por exemplo.

2 Natureza da luz

Antes de abordarmos a Relatividade de Einstein, vamos elencar algumas propriedades relevantes da luz. Há vários séculos, os cientistas já se preocupavam em determinar a velocidade da luz. Alguns experimentos relevantes para a determinação da velocidade da luz foram:

1676	Romer, observação de saltélites de Júpiter: $c = 2,14300 \times 10^8 \text{m/s}$
1725	James Bradely, observação da aberração da luz estelar: $c = 3,1 \times 10^8 \text{m/s}$
1849	Fizeau: $c = (315300 \pm 500) \text{km/s}$
1862	Foucault: $c = (298000 \pm 500) \text{km/s}$
1927	Michelson $c = (299796 \pm 4) \text{km/s}$
1950	Louis Essen, cavidades ressonantes: $c = (299792,5 \pm 1) \text{km/s}$

Atualmente, a velocidade da luz no vácuo é definida por

$$c = 2,99792458 \times 10^8 \text{m/s} \quad (14)$$

e o metro dado pela distância que a luz viaja numa fração de $1/299.792.458$ do segundo, que por sua vez é definido como $9.192.631.770$ períodos da radiação emitida na transição hiperfina entre dois estados do Césio 133.

Eletromagnetismo e Transformações de Galileu

A natureza ondulatória da luz é explicada pelas equações de Maxwell, com o que se entende que a luz é composta por campos eletromagnéticos oscilantes. A forma integral dessas equações é:

1. Lei de Gauss das cargas elétricas:

$$\oint_{\partial V} \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{Q_{\text{enc}}}{\epsilon_0} \quad (15)$$

2. Lei de Gauss do magnetismo (não há monopolo magnético):

$$\oint_{\partial V} \vec{B} \cdot d\vec{A} = 0 \quad (16)$$

3. Lei de Faraday

$$\oint_{\partial S} \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{d\Phi_B}{dt} = -\frac{d}{dt} \int_S \vec{B} \cdot d\vec{A} \quad (17)$$

4. Lei de Ampère-Maxwell

$$\oint_{\partial S} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I_{\text{enc}} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{d\Phi_E}{dt} = \mu_0 \int_S \vec{j} \cdot d\vec{A} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{d}{dt} \int_S \vec{E} \cdot d\vec{A}. \quad (18)$$

Utilizando os teoremas de Gauss (da divergência) e de Stokes, aqui escritos para o campo elétrico,

$$\oint_{\partial V} \vec{E} \cdot d\vec{A} = \int_V (\vec{\nabla} \cdot \vec{E}) dV, \quad (19)$$

$$\oint_{\partial S} \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int (\vec{\nabla} \times \vec{E}) \cdot d\vec{A}, \quad (20)$$

podemos expressar as equações de Maxwell na sua forma diferencial:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (21)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \quad (22)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (23)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}. \quad (24)$$

No vácuo, temos $\rho = 0$ e $\vec{j} = \rho \vec{v} = \vec{0}$. Tomando a derivada parcial em relação ao tempo da última equação, com alguma manipulação usando a identidade vetorial $\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{E}) = \vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \vec{E}) - \nabla^2 \vec{E}$, podemos mostrar que o campo elétrico deve obedecer a equação de onda

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \vec{E} - c^2 \nabla^2 \vec{E} = 0, \quad (25)$$

onde

$$c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}}. \quad (26)$$

Numa versão simplificada da equação de onda para uma função escalar $\psi(t, x)$, vejamos o que ocorre ao realizarmos uma TG. Assumindo que $\psi(t, x) = \psi(t', x')$, isto é, a onda é a mesma independentemente do observador inercial, vamos trocar os operadores diferenciais das coordenadas $(t, x) \rightarrow (t', x')$:

$$S : \frac{\partial^2}{\partial t^2} \psi - c^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \psi = 0, \quad (27)$$

$$S' : \frac{\partial^2}{\partial t'^2} \psi - 2V \frac{\partial^2}{\partial t' \partial x'} \psi - (c^2 - V^2) \frac{\partial^2}{\partial x'^2} \psi = 0 \quad (28)$$

Isso mostra que a equação de onda para luz não é invariante por uma TG. Isso é esperado para ondas materiais, como perturbações no ar ou água por exemplo, nas quais os fluidos estejam em movimento em relação ao observador. Admitindo que a TG seja válida para o eletromagnetismo, deveria haver um meio de propagação para luz, que foi chamado de éter.

Em 1897, o experimento de interferometria de Michelson e Morley não detectou sinais de movimento da Terra em relação ao éter. Tal resultado indica que não existe éter, portanto não há razão para haver diferenças na velocidade da luz entre referenciais inerciais.

Outra análise relevante que demonstra a incompatibilidade do eletromagnetismo com a TG está associada à força exercida por campos elétricos e magnéticos em uma carga q com velocidade \vec{v} , a chamada força de Lorentz

$$\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}). \quad (29)$$

Num referencial S' sua velocidade será $\vec{v}' = \vec{v} - \vec{V}$ e assumiremos que a carga é invariante.

Vamos analisar o caso onde somente há um campo elétrico gerado por uma carga puntiforme Q . Nos referenciais S e S' temos

$$S : \vec{E} = -\frac{kQ}{r^2} \hat{r} \quad S' : \vec{E}' = -\frac{kQ}{r'^2} \hat{r}'.$$

Segundo a TG: $\hat{r}' = \hat{r}$ e $r' = r$, portanto $\vec{E}' = \vec{E}$. Nesse caso, a lei de força para partícula teste de carga q não muda. Note que o mesmo se aplica para uma força gravitacional.

Para o caso geral, temos a seguinte transformação de $S \rightarrow S'$:

$$\begin{aligned} \vec{E} + \vec{v} \times \vec{B} &\rightarrow \vec{E}' + \vec{v}' \times \vec{B}' \\ \vec{E} + \vec{v} \times \vec{B} &\rightarrow \vec{E}' + (\vec{v} - \vec{V}) \times \vec{B}'. \end{aligned}$$

Motivados pelo exemplo anterior, assumimos que $\vec{E}' = \vec{E}$. Admitindo um campo magnético constante e uniforme no espaço, tal que $\vec{B} = \vec{B}'$, temos

$$\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B} \rightarrow \vec{E} + (\vec{v} - \vec{V}) \times \vec{B},$$

ou seja, a força magnética muda com uma TG:

$$\vec{v} \times \vec{B} \rightarrow (\vec{v} - \vec{V}) \times \vec{B}.$$

Uma possível solução para essa incoerência, seria assumir que o campo elétrico é modificado segundo

$$\vec{E} \rightarrow \vec{E}' - \vec{V} \times \vec{B}'.$$

Contudo isso é inconsistente com o exemplo abordado para o campo elétrico. Portanto, a força magnética não é covariante frente à TG. A solução definitiva para esse problema é assumir a Transformação de Lorentz, que veremos em seguida, e que os campos elétricos e magnéticos na verdade são representações simplificadas de uma ente chamado tensor eletromagnético, com o qual a invariância da Relatividade Especial fica evidente. Tal análise é mais específica dos cursos de eletromagnetismo e pode ser encontrada nos livros de Landau (Teoria da Campos) ou Jackson (Classical Electrodynamics).

3 Relatividade de Einstein

A teoria da Relatividade de Einstein é contruída com base em dois postulados:

1. Postulado da Relatividade: as leis físicas e resultados de experimentos devem ser independentes do movimento de translação uniforme entre sistemas de referência (referenciais inerciais).
2. Postulado da Velocidade da Luz: a velocidade da luz no vácuo é a mesma para todos referenciais inerciais.

Assim, admitido que o eletromagnetismo de Maxwell esteja correto, devemos encontrar outra transformação que ligue referenciais inerciais mantendo a constância da velocidade da luz.

3.1 Transformação de Lorentz

Devemos contruir transformações entre referenciais inerciais tais que a velocidade da luz seja invariante. Assim, uma frente de onda esférica num referencial deve permanecer esférica em outro (sem deformação) e com mesma velocidade, isto é,

$$S: \quad x^2 + y^2 + z^2 = c^2 t^2, \quad (30)$$

$$S': \quad x'^2 + y'^2 + z'^2 = c^2 t'^2. \quad (31)$$

Iniciando com a forma $x' = x - Vt$, vemos que uma transformação análoga é necessária para o tempo, $t' = t - Vx/c^2$, onde c foi escolhido para acertar a dimensão de tempo. Usando essas duas expressões, notaremos que ainda é preciso eliminar um fator $\sqrt{1 - V^2/c^2}$ dos termos associados a x e t .

Finalmente, todas essas considerações nos levam à Transformação de Lorentz (TL):

$$\begin{aligned} t' &= (t - Vx/c^2) / \sqrt{1 - V^2/c^2} \\ x' &= (x - Vt) / \sqrt{1 - V^2/c^2} \\ y' &= y \\ z' &= z \end{aligned} \quad (32)$$

Definindo

$$\beta = \frac{V}{c} \quad (33)$$

e

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad (34)$$

temos

$$\begin{aligned} t' &= \gamma(t - \beta x/c) \\ x' &= \gamma(x - \beta ct) \\ y' &= y \\ z' &= z \end{aligned} \quad (35)$$

3.2 Adição de velocidades

Utilizando a TL, temos

$$dx = \gamma(dx' + \beta c dt') \quad (36)$$

$$dt = \gamma(dt' + \beta dx'/c) \quad (37)$$

e $dy = dy'$ e $dz = dz'$. Assim temos

$$v_x = \frac{dx}{dt} = \frac{v'_x + V}{1 + v'_x \beta / c} \quad (38)$$

e

$$v_y = \frac{dy}{dt} = \frac{1}{\gamma} \frac{v'_y}{1 + v'_x \beta / c} \quad \text{e} \quad v_z = \frac{dz}{dt} = \frac{1}{\gamma} \frac{v'_z}{1 + v'_x \beta / c}. \quad (39)$$

3.3 Contração do comprimento

Seja uma barra de comprimento $L_0 = x_2 - x_1$ alinhada ao eixo x de um referencial S . Num referencial S' , o comprimento dessa mesma barra, medido também em repouso em S' , também será $L_0 = x'_2 - x'_1$. A quantidade L_0 é chamada de comprimento próprio.

Considerando uma barra de comprimento próprio L_0 em S , a medida simultânea ($\Delta t' = 0$) das posições final e inicial da barra realizadas no referencial S' é dada por:

$$L_0 = x_2 - x_1 = \gamma(x'_2 - \beta ct'_2 - x_1 + \beta ct'_1) = \gamma(\Delta x' - \beta c \Delta t') \quad (40)$$

$$L_0 = \gamma(x'_2 - x'_1) = \gamma L. \quad (41)$$

A expressão

$$L = \frac{L_0}{\gamma} \quad (42)$$

indica que o comprimento percebido em S' é menor por um fator $1/\gamma$. Para uma barra alinhada ortogonalmente à direção do movimento relativo dos referenciais, não há mudanças aparentes de comprimento.

É interessante notar que a medida simultânea em S' não é percebida como simultânea em S :

$$t'_2 - t'_1 = \gamma(t_2 - \beta x_2/c - t_1 + \beta x_1/c) = \gamma(\Delta t - \beta \Delta x/c) = 0 \quad (43)$$

$$\Delta t = \beta \Delta x/c. \quad (44)$$

Ou seja, um evento simultâneo em S' não é notado como simultâneo em S , e vice-versa.

3.4 Dilatação do tempo

A medida de um intervalo de tempo no referencial de repouso de um relógio é chamada de tempo próprio. Num referencial S , temos:

$$\tau = t_2 - t_1. \quad (45)$$

Segundo a TL, esse intervalo terá a seguinte medida em S'

$$\Delta t' = t'_2 - t'_1 = \gamma(t_2 - \beta x_2/c - t_1 + \beta x_1/c) = \gamma(\tau - \beta \Delta x/c). \quad (46)$$

Como o relógio está parado em S , temos

$$\Delta t' = \gamma \tau, \quad (47)$$

isto é, o intervalo medido por S' sofreu uma dilatação pelo fator γ .

A melhor forma de entender esse efeito empiricamente é relacionando uma medida de tempo de um relógio parado no referencial S , que consideraremos como referencial do laboratório, com uma medida de tempo feita por um relógio em movimento. Historicamente, o decaimento dos mésons foi utilizado como relógio em movimento, a velocidades próximas à da luz. Nesse caso, em seu referencial de repouso, os mésons têm meia-vida τ . No referencial do laboratório, um méson viajando a $0,99c$ terá meia-vida cerca de 7τ . Assim, se a alta altitude espera-se detectar certo número de decaimento de mésons, a baixa altitude, sem considerar o efeito de dilatação do tempo, esse número seria muito menor. Efetivamente um grande número de mésons é observado a baixa altitude, o que é explicado pela dilatação do tempo. Tal experimento está detalhado neste vídeo. Ao final do vídeo, também temos a interpretação de que, para o méson, houve contração do comprimento percorrido.

O fórmula da dilatação do tempo é aproximadamente válida para partículas aceleradas em situações que a variação do módulo da velocidade é muito menor que sua velocidade instantânea. Além disso, a equação (47) depende apenas do módulo da velocidade, logo deve também ser válida para situações em que a velocidade apenas muda de direção, como num movimento circular.

3.5 Efeito Doppler relativístico

Considere uma fonte emitindo frentes de onda luminosa em repouso, $\Delta x = 0$, no sistema S . Duas frentes de onda são emitidas com intervalo de tempo $\Delta t = \tau$. No referencial S' , qual o intervalo de chegada dessas frentes num receptor em repouso? Pela TL, temos

$$\Delta x' = \gamma(\Delta x - V\Delta t) = -\gamma V\tau, \quad (48)$$

$$\Delta t' = \gamma(\Delta t - \beta\Delta x/c) = \gamma\tau. \quad (49)$$

A quantidade $\Delta t'$ representa a diferença de tempo de chegada das frentes devido à dilatação do tempo, a qual não existe na mecânica clássica. A quantidade $\Delta x'$ representa a diferença devido ao movimento relativo do receptor e fonte.

No caso em que o receptor se afasta, a diferença de tempo associada ao deslocamento do receptor será $|\Delta x'|/c = \gamma V\tau/c$. Assim, o tempo total entre a chegada das frentes de onda em S' será:

$$\Delta t' + \frac{\gamma V\tau}{c} = \tau \left(\frac{1 + \beta}{\sqrt{1 - \beta^2}} \right) = \tau \sqrt{\frac{1 + \beta}{1 - \beta}}. \quad (50)$$

Representando essa diferença em termos da frequência, que naturalmente pode ser associada à frequência da onda emitida, i.e., $f = 1/\tau$, a frequência observada em S' será:

$$f' = f \sqrt{\frac{1 - \beta}{1 + \beta}}. \quad (51)$$

No caso em que o receptor se aproxima da fonte, basta substituir $\beta \rightarrow -\beta$.

Na relatividade restrita, há também o efeito Doppler transversal, no qual, por exemplo, o receptor não se afasta da fonte e recebe um sinal de uma direção ortogonal ao seu movimento. Esse cenário pode ser visualizado como uma órbita circular do receptor em torno da fonte. Nesse caso, somente o efeito da dilatação temporal está presente, $\Delta t' = \gamma\tau$, ou em termos de frequência

$$f' = \frac{f}{\gamma}. \quad (52)$$

4 Espaço-Tempo

4.1 Espaço Eucliano

No Espaço Euclidiano (EE), vale o Teorema de Pitágoras, com o qual podemos determinar distâncias entre dois pontos num espaço de duas dimensões. Nesse contexto, podemos definir a distância, Δs , entre dois pontos no EE de três dimensões como

$$\Delta s^2 = \Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2. \quad (53)$$

Queremos generalizar a ideia de distância para espaços não euclidianos, mas que localmente possam ser considerados como euclidianos. Para isso temos que definir um diferencial

de distância. Considerando pontos $A(x, y, z)$ e $B(x + dx, y + dy, z + dz)$, definimos o diferencial de distância ds no EE como:

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 . \quad (54)$$

Reescrevendo em termos de coordenadas indexadas, temos

$$ds^2 = (dx^1)^2 + (dx^2)^2 + (dx^3)^2 , \quad (55)$$

ou ainda

$$ds^2 = \sum_{i,j=1}^3 \delta_{ij} dx^i dx^j , \quad (56)$$

onde é o delta de Kronecker, que representa uma matriz identidade:

$$\delta_{ij} = \text{diag}(1, 1, 1) . \quad (57)$$

Nessas notas, os índices latinos representam as coordenadas espaciais e podem variar de 1 a 3.

A expressão (56) pode ser escrita de forma simplificada com a convenção de soma de Einstein, que estabelece que dois índices repetidos, um em cima e outro embaixo, indicam soma nesse índice, ou seja,

$$ds^2 = \delta_{ij} dx^i dx^j . \quad (58)$$

4.2 Espaço de Minkowski

Podemos expressar a coordenada temporal como uma nova dimensão do espaço, tomando a definição

$$x^0 = ct , x^1 = x , x^2 = y , x^3 = z . \quad (59)$$

Nessa notação a TL pode ser escrita como

$$\begin{aligned} x'^0 &= \gamma(x^0 - \beta x^1) \\ x'^1 &= \gamma(x^1 - \beta x^0) \\ x'^2 &= x^2 \\ x'^3 &= x^3 \end{aligned} \quad (60)$$

Note a simetria presente nessa forma.

A forma apresentada sugere que a TL pode ser expressa como uma mudança transformação linear de um sistema de coordenadas num espaço de quatro dimensões, de fato podemos escrever:

$$\begin{pmatrix} x'^0 \\ x'^1 \\ x'^2 \\ x'^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} , \quad (61)$$

o que pode ser expresso de forma mais compacta:

$$x'^{\mu} = \Lambda^{\mu}_{\nu} x^{\nu}, \quad (62)$$

onde o índices repetidos indicam soma, que nesse caso representa uma multiplicação matricial “linha por colun”. Tal expressão indica, por exemplo:

$$x'^0 = \Lambda^0_{\nu} x^{\nu} = \Lambda^0_0 x^0 + \Lambda^0_1 x^1 + \Lambda^0_2 x^2 + \Lambda^0_3 x^3. \quad (63)$$

Isto é, temos os elementos da primeira linha da matriz Λ multiplicado o vetor coluna x . Segundo a matriz da TL, temos:

$$x'^0 = \gamma x^0 - \gamma \beta x^1 + 0(x^2) + 0(x^3) = \gamma(x^0 - \beta x^1). \quad (64)$$

A transformação inversa pode ser deduzida invertendo a matriz Λ , ou simplesmente resolvendo para as coordenadas x^{μ} na Eq. (60), temos então

$$\begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & \beta\gamma & 0 & 0 \\ \beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x'^0 \\ x'^1 \\ x'^2 \\ x'^3 \end{pmatrix}. \quad (65)$$

Assim, vemos que a TL é uma transformação de coordenadas num espaço de quatro dimensões, o qual é conhecido como espaço de Minkowski.

Pelo princípio da relatividade, realizar uma TL de um referencial S para outro S' e depois o reverso devemos obter novamente S . Então devemos ter

$$x'^{\mu} = \Lambda^{\mu}_{\nu} x^{\nu} = \Lambda^{\mu}_{\nu} \Lambda'^{\nu}_{\alpha} x'^{\alpha},$$

onde Λ'^{ν}_{α} é a matriz inversa de Λ^{ν}_{α} . Para que a igualdade seja válida, devemos ter

$$\Lambda^{\mu}_{\nu} \Lambda'^{\nu}_{\alpha} = \delta^{\mu}_{\alpha},$$

onde $\delta^{\mu}_{\alpha} = \text{diag}(1, 1, 1, 1)$ é o delta de Kronecker no espaço-tempo, ou matriz identidade. Em outras palavras, essa expressão indica que Λ vezes sua inversa deve dar a matriz identidade.

O espaço no qual atuam as TL deve incluir o tempo, vamos considerar a seguinte escolha de assinatura do elemento de linha

$$ds^2 = (dx^0)^2 - (dx^1)^2 - (dx^2)^2 - (dx^3)^2. \quad (66)$$

Como a TL é linear, temos a seguintes trocas de diferenciais entre referenciais:

$$\begin{aligned} dx^0 &= \gamma(dx'^0 + \beta dx'^1) \\ dx^1 &= \gamma(dx'^1 + \beta dx'^0) \\ dx^2 &= dx'^2 \\ dx^3 &= dx'^3 \end{aligned}, \quad (67)$$

Então

$$\begin{aligned}
ds^2 &= (dx^0)^2 - (dx^1)^2 - (dx^2)^2 - (dx^3)^2, \\
ds^2 &= \gamma^2 \left((dx'^0)^2 + \beta dx'^0 dx'^1 + \beta^2 (dx'^1)^2 \right) - \gamma^2 \left((dx'^1)^2 + \beta dx'^0 dx'^1 + \beta^2 (dx'^0)^2 \right) - (dx'^2)^2 - (dx'^3)^2, \\
ds^2 &= \gamma^2 (1 - \beta^2) \left[(dx'^0)^2 - (dx'^1)^2 \right] - (dx'^2)^2 - (dx'^3)^2, \\
ds^2 &= (dx'^0)^2 - (dx'^1)^2 - (dx'^2)^2 - (dx'^3)^2 = ds'^2.
\end{aligned}$$

Note que, com a definição (66), o diferencial de distância do espaço é invariante pela TL.

Definimos o Espaço de Minkowski como espaço com seguinte a estrutura métrica (diferencial de distância):

$$ds^2 = \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu, \quad (68)$$

onde

$$\eta_{\mu\nu} = \text{diag}(1, -1, -1, -1) \quad (69)$$

é o tensor métrico do espaço de Minkowski, mas é comum referir-se a ele simplesmente como métrica de Minkowski.

No EM, a posição de uma partícula é um quadri-vetor $X^\mu = (x^0, x^1, x^2, x^3)$, que corresponde a um certo tempo x^0 numa certa posição $\vec{x} = (x^1, x^2, x^3)$. Outra representação possível seria $X^\mu = (x^0, \vec{x})$.

Como vimos, ds^2 é um invariante de Lorentz, ou seja sua expressão é preservada em referenciais ligados por uma TL, $ds^2 = ds'^2$. Usando a forma matricial $dx' = \Lambda dx$, podemos escrever

$$\begin{aligned}
ds'^2 &= (dx')^T \eta' (dx') = (\Lambda dx)^T \eta' (\Lambda dx) \\
ds^2 &= dx \left(\Lambda^T \eta' \Lambda \right) dx.
\end{aligned}$$

Portanto as matrizes da TL devem satisfazer

$$\Lambda^T \eta' \Lambda = \eta \quad (70)$$

Essa expressão também pode ser escrita com notação de índices:

$$ds^2 = \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = ds'^2 = \eta'_{\mu\nu} dx'^\mu dx'^\nu \quad (71)$$

$$\eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = \eta'_{\mu\nu} \Lambda_\alpha^\mu \Lambda_\beta^\nu dx^\alpha dx^\beta \quad (72)$$

$$\eta'_{\alpha\beta} \Lambda_\nu^\alpha \Lambda_\mu^\beta dx^\nu dx^\mu = \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu,$$

ou seja

$$\eta'_{\alpha\beta} \Lambda_\nu^\alpha \Lambda_\mu^\beta = \eta_{\mu\nu}.$$

A propriedade (70) é satisfeita por matrizes de rotação. Por exemplo, uma rotação de um ângulo θ entre os eixos x e y é dada por:

$$\Lambda_R = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta) & \sin(\theta) & 0 \\ 0 & -\sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Outra possibilidade são os “boosts” por um ângulo θ entre as coordenadas t e x :

$$\Lambda_B = \begin{pmatrix} \cosh(\theta) & -\sinh(\theta) & 0 & 0 \\ -\sinh(\theta) & \cosh(\theta) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

4.3 Intervalos

No EM há três tipos de intervalos possíveis (aqui assumimos apenas variações de x^0 e x^1):

1. Tipo luz (propagação de um fóton): $dx^1 = cdt = dx^0 \Rightarrow ds^2 = 0$,
2. Tipo tempo (propagação de partícula massiva com velocidade $v < c$): $dx^1 = vdt \Rightarrow ds^2 = (1 - \beta^2)$,
3. Tipo espaço (pontos do espaço tempo que não podem ser conectados causalmente) $dx^1 > cdt \Rightarrow ds^2 < 0$.

4.4 Tempo próprio

Vimos que no EM ds^2 é invariante por TLs. Isso nos permite definir uma medida de tempo invariante, chamada de tempo próprio:

$$d\tau = \frac{1}{c} \sqrt{ds^2}. \quad (73)$$

Para uma partícula com massa, sempre temos $ds^2 \geq 0$. O tempo próprio é medido localmente e por isso pode considerar variações de velocidade da partícula. Naturalmente, um intervalo de tempo próprio é dado por

$$\Delta\tau = \int_{\tau_1}^{\tau_2} d\tau \quad (74)$$

5 Dinâmica relativística

Como vimos, a posição de uma partícula no EM pode ser indicada por um quadri-vetor posição X^μ . Podemos generalizar os conceitos de velocidade, momento e aceleração usando derivadas de quadri-vetores em relação ao tempo próprio.

Antes de prosseguir vamos definir o produto escalar dos quadri-vetores. Sejam $A^\mu = (A^0, A^1, A^2, A^3)$ e $B^\mu = (B^0, B^1, B^2, B^3)$, o produto escalar entre eles é dado por

$$A \cdot B = g_{\mu\nu} A^\mu B^\nu, \quad (75)$$

onde $g_{\mu\nu}$ é a métrica do espaço. Também podemos representar

$$g_{\mu\nu} A^\nu = A_\mu \quad (76)$$

e

$$A \cdot B = A_\mu B^\mu. \quad (77)$$

Dizemos que vetores com índices superiores, A^μ , são contravariantes e vetores com índice inferiores, A_μ , são ditos covariantes. A razão desta distinção é devida às propriedades desses vetores frente à transformações de coordenadas, o que não abordaremos aqui.

No EE temos a relação usual, com $g_{\mu\nu} \rightarrow \delta_{ij}$

$$A \cdot B = \delta_{ij} A^i B^j = A^1 B^1 + A^2 B^2 + A^3 B^3. \quad (78)$$

Já no EM temos $g_{\mu\nu} \rightarrow \eta_{\mu\nu}$

$$A \cdot B = \eta_{\mu\nu} A^\mu B^\nu = A^0 B^0 - A^1 B^1 - A^2 B^2 - A^3 B^3. \quad (79)$$

5.1 Quadri-velocidade

Vamos definir a quadri-velocidade como

$$U^\mu = \frac{dX^\mu}{d\tau} = \left(\frac{dx^0}{d\tau}, \frac{dx^1}{d\tau}, \frac{dx^2}{d\tau}, \frac{dx^3}{d\tau} \right). \quad (80)$$

Podemos reescrever o tempo próprio na forma:

$$d\tau = dt \sqrt{\left(1 - \frac{(dx^1)^2}{c^2 dt^2} - \frac{(dx^2)^2}{c^2 dt^2} - \frac{(dx^3)^2}{c^2 dt^2} \right)} \quad (81)$$

$$d\tau = dt \sqrt{1 - \beta(v)^2} = \frac{dt}{\gamma(v)} \quad (82)$$

$$U^\mu = \gamma(v) (c, \vec{v}). \quad (83)$$

Note que, aqui as quantidade β e γ se referem à velocidade instantânea da partícula, não à velocidade entre referenciais na TL. Sendo U^μ um quadri-vetor, ele se transforma segundo a TL. Mas é interessante notar que podemos construir a partir dele uma quantidade invariante:

$$U \cdot U = U^\mu U_\mu, \quad (84)$$

onde

$$U_\mu = \eta_{\mu\nu} U^\nu = \gamma (c, -\vec{v}), \quad (85)$$

então

$$U^\mu U_\mu = \gamma^2 (c^2 - v^2) = c^2 \gamma^2 (1 - \beta^2) \quad (86)$$

$$U^\mu U_\mu = c^2. \quad (87)$$

5.2 Quadri-momento

Já definimos a quadri-velocidade, que é usada para definir o quadri-momento de uma partícula:

$$P^\mu = m_0 U^\mu = (\gamma m_0 c, \gamma m_0 \vec{v}), \quad (88)$$

onde m_0 é a massa da partícula em seu referencial de repouso. P^μ também é um vetor que se transforma segundo a TL e tem o módulo invariante:

$$P^\mu P_\mu = m_0^2 c^2. \quad (89)$$

5.3 Força

Agora queremos determinar a força no referencial do laboratório, num tempo t . Usando a parte espacial do quadri-momento, temos

$$\vec{F} = \frac{d}{dt} (\gamma m_0 \vec{v}). \quad (90)$$

Esta é força relativística que devemos usar para resolver problemas dinâmicos.

5.4 Energia cinética relativística

Na mecânica não relativística temos $\vec{F} = \frac{d}{dt} \vec{p}$. Em uma dimensão e para massa constante, identificamos a energia cinética como

$$K = W = \int_0^x m a d\tilde{x} = \int_0^x m dv \frac{d\tilde{x}}{dt} = \int_0^v m \tilde{v} d\tilde{v} = \frac{1}{2} m v^2. \quad (91)$$

Por analogia, na mecânica relativística teremos:

$$K = \int_0^x \frac{d}{dt} \left(\frac{m_0 v}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \right) d\tilde{x} = \int_0^t \frac{d}{dt} \left(\frac{m_0 v}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \right) v dt. \quad (92)$$

Vamos resolver a primitiva

$$\begin{aligned} \int \frac{d}{dt} \left(\frac{m_0 v}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \right) v dt &= \int \left[\frac{m_0 v}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \frac{dv}{dt} + \frac{m_0 v^3/c^2}{(1 - v^2/c^2)^{3/2}} \frac{dv}{dt} \right] dt \\ &= \int \left[\frac{m_0 v dv/dt}{(1 - v^2/c^2)^{3/2}} \right] dt = \int \frac{d}{dt} \left(\frac{m_0 c^2}{(1 - v^2/c^2)^{1/2}} \right) dt = \int d \left(\frac{m_0 c^2}{(1 - v^2/c^2)^{1/2}} \right) = \frac{m_0 c^2}{(1 - v^2/c^2)^{1/2}} \end{aligned} \quad (94)$$

Tomando os limites entre $v = 0$ e v , temos:

$$K = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} - m_0 c^2 \quad (95)$$

Onde identificamos a energia de repouso

$$E_0 = m_0 c^2 \quad (96)$$

e a energia cinética

$$K = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \quad (97)$$

Identificando $E = \gamma m_0 c^2$ e $\vec{p} = \gamma m_0 \vec{v}$ com a energia e momento relativísticos, podemos reexpressar equação (89) de uma maneira mais conveniente. Com essas definições, temos

$$P^\mu = (\gamma m_0 c, \gamma m_0 \vec{v}) = (E/c, \vec{p}),$$

então

$$\begin{aligned} P^\mu P_\mu &= \frac{E^2}{c^2} - p^2 = m_0^2 c^2 \\ E^2 &= m_0^2 c^4 + p^2 c^2 \end{aligned}$$

6 Introdução à Relatividade Geral

“Um pouco de geometria

A curva é o caminho mais agradável entre dois pontos.”

Mario Quintana