ESCOLA DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA – UFRN
PROVA 3 DE PROBABILIDADE E ESTATÍSTICA – ECT 2207 – Turma 1
04/12/2018

Prof. Ronaldo

Nome Legível:____

Assintatura:____

Instruções:

1. **Leia todas as instruções antes de qualquer outra coisa.**
2. **A resolução das questões pode ser feita com grafite.**
3. **Faça uma prova organizada e detalhada, apresentando as respostas de forma coerente, de modo que todas as justificativas relevantes no contexto da disciplina devem estar presentes na solução. Indique bem o que você está fazendo pois resultados sem explicação e/ou desorganizados não serão considerados.**
4. **Resolva cada questão na frente e/ou verso da folha onde ela se encontra.**
5. **Folhas com idicadas como de rascunho não serão corrigidas.**

Q1	
Q2	
Q3	
Q4	

Questão 1.

O tempo de espera para atendimento em um banco tem distribuição normal, com média $\mu = 16$min e desvio padrão $\sigma = 10$min. Seja $\bar{X}_n$ o tempo médio de espera de n clientes. Determine:
(a) Qual o valor esperado e desvio padrão $\bar{X}_{25}$ (1 pt).
(b) Qual a probabilidade de $\bar{X}_{25}$ ser maior que 20min (1 pt).
(c) Qual o valor esperado e desvio padrão do tempo total de espera de 25 clientes (1 pt).

Solução:

(a) A distribuição da média amostral de uma população normalmente distribuída é também normal, com valor eperado

$$E\left(\bar{X}_{25}\right) = \mu = 16min$$

e desvio padrão

$$\sigma_{\bar{X}_{25}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{10}{5} = 2\text{min}$$

(b) Sabemos que $\bar{X}_{25}$ tem distribuição normal e queremos $P\left(\bar{X}_{25} > 20\right)$, o que corresponde a

$$Z > \frac{20-\mu}{\sigma_{\bar{X}_{25}}} = \frac{20-16}{2} = 2.$$

Portanto buscamos

$$P\left(Z > 2\right) = 1 - P\left(Z < 2\right) = 1 - 0,9772 = 0,0228$$

(c) O tempo total de espera, $T = \sum_{i=1}^{25} X_i$, também tem distribuição normal, com valor esperado

$$E\left(T\right) = n\mu = 25\left(16\right) = 400\text{min}$$

e desvio padrão

$$\sigma_T = \sqrt{n}\sigma = 50\text{min}$$

Questão 2.

Considerando uma amostra com $\bar{X}_{20} = 3$, construa intervalos de confiança para a média populacional com 90% de nível de confiança nos seguintes casos:

(a) O desvio padrão populacional é conhecido, dado por $\sigma = 1$ (1 pt).

(b) O desvio padrão populacional é desconhecido e o desvio padrão amostral é $s = 1$ (1 pt).

(c) E, desconsiderando mudanças nas quantidade amostrais reportadas anteriormente, estime n para que os intevalos de confiança desses dois casos sejam equivalentes (1 pt).

Solução:

(a) Neste caso a média amostral tem distribuição normal, assim

$$IC\left(\mu, 1-\alpha\right) = \bar{X}_n \pm z_{1-\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

$$IC\left(\mu, 0.9\right) = 3 \pm z_{0.95} \frac{1}{\sqrt{20}} = 3 \pm \frac{1,645}{\sqrt{20}} = 3 \pm 0.3678$$

Então

$$\mu = 3 \pm 0.3678$$

(b) Neste caso a média amostral tem distribuição-t, assim

$$IC\left(\mu, 1-\alpha\right) = \bar{X}_n \pm t_{\frac{\alpha}{2}, n-1} \frac{s}{\sqrt{n}}$$

$$IC\left(\mu, 0.9\right) = 3 \pm \frac{t_{0.05,19}}{\sqrt{20}} = 3 \pm \frac{1.729}{\sqrt{20}} = 3 \pm 0.3866$$

$$\mu = 3 \pm 0.3866$$

(c) Buscamos encontrar n tal que

$$z_{0.95} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = t_{\frac{\alpha}{2}, n-1} \frac{s}{\sqrt{n}}$$

$$z_{0.95} = t_{0.05, n-1}$$

$$t_{0.05, n-1} = 1,645 \Rightarrow n \simeq 250$$

Questão 3.

Uma pesquisa recente do IBGE mostrou que, em 2016, o 1% dos trabalhadores brasileiros de maiores salários recebiam, em média, R$ 27000 por mês. Chamando este grupo de trabalhadores como "grupo do topo" e dividindo todos trabalhadores entre os que estão ou não nesse grupo, determine:

(a) Considerando os dados apresentados como populacionais, determine o número mínimo, n, de uma amostra de trabalhadores para que a proporção amostral $\hat{p} = \#\{\text{topo}\}/n$ seja normalmente distribuída (1 pt).

(b) Para uma amostra de tamanho determinado no ítem (a), qual a probabilidade de não haver nenhum trabalhador no topo (1 pt).

Solução:

(a) A situação proposta tem distribuição de Bernoulli com $p = 0,01$ (fração de trabalhadores que ganham em média R$ 27000 por mês). Numa amostra de n trabalhadores, a fração $\hat{p}$ desses trabalhadores terá distribuição normal se $np > 5$ e $n(1-p) > 5$. Para o p do problema, a primeira condição é a mais restriva, que determina

$$np > 5 \Rightarrow n > 500\,.$$

Portanto precisamos uma amostra de pelo menos $n = 501$ trabalhadores para que $\hat{p}$ seja normalmente distribuida.

(b) Com $n = 501$, $\hat{p}$ tem distribuição normal:

$$\hat{p} \sim N\left(p, \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}\right) = N(0.01, 0.00445)$$

Para que não haja nenhum trabalhador do grupo do topo, precisamos

$$n\hat{p} < 1 \Rightarrow \hat{p} < 1/501\,,$$

o que corresponde

$$Z = \frac{1/501 - 0.01}{0.00445} \simeq -1.80$$

e a probabilidade é dada por

$$P(Z < -1.80) = 0.0359\,.$$

Questão 4.

Baseado numa amostra de 25 alunos com média final 4.2, um professor acredita que a média final de suas turmas diminuiu em relação à média histórica de 5.3. Historicamente o desvio padrão associado à média final é de 2.2.
(a) Assumindo que a distribuição de notas é normal, teste a hipótese do professor com nível de significância de 8% e determine o valor p associado à amostra. (1 pt)
(b) Dê um argumento quantitativo (contra ou a favor) sobre a suposição de que a distribuição histórica de notas é normal (dica: avalie as notas mínimas ou máximas possíveis) (1,5 pt).

Solução:

(a) Em função da impressão do professor, a hipótese nula é $H_0 : \mu \geq 5.3$ e a hipótese alternativa $H_1 : \mu < 5.3$. Precisamos de um teste de cauda inferior, com

$$P\left(z_c\right) < 0.08 \Rightarrow z_c < -1.40$$

Para a amostra dada temos

$$z_a = \frac{4.2 - 5.3}{2.2/\sqrt{25}} = -\frac{5\left(1.1\right)}{2.2} \Rightarrow z_a = -2.5$$

E o valor-$p = 0.0062$. Como z_a está na região de rejeição, rejeitamos a hipótese nula em favor do entendimento de que a média histórica diminuiu.

(b) As notas devem sempre estar no intervalo $[0, 10]$. Como a média é maior que 5, vamos testar o limite superior, que tem

$$z_m = \frac{10 - \mu}{\sigma} = \frac{10 - 5.3}{2.2} \simeq 2.13$$

Então, segundo essa distribuição a probabilidade de notas maiores que 10 é

$$P\left(Z > 2.13\right) = 1 - P\left(Z < 2.13\right) = 1 - 0.9834 = 0.0166$$

Por isso, ainda que tal probabilidade seja baixa, formalmente, a distribuição não pode ser normal.

RASCUNHO