ESCOLA DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA – UFRN
PROVA 2 DE PROBABILIDADE E ESTATÍSTICA – ECT 2207 – Turma 1
18/10/2018

Prof. Ronaldo

Nome Legível:____

Assintatura:____

Instruções:

1. **Leia todas as instruções antes de qualquer outra coisa.**
2. **A resolução das questões pode ser feita com grafite.**
3. **Faça uma prova organizada e detalhada, apresentando as respostas de forma coerente, de modo que todas as justificativas relevantes no contexto da disciplina devem estar presentes na solução. Indique bem o que você está fazendo pois resultados sem explicação e/ou desorganizados não serão considerados.**
4. **Resolva cada questão na frente e/ou verso da folha onde ela se encontra.**
5. **Folhas com idicadas como de rascunho não serão corrigidas.**

Q1	
Q2	
Q3	
Q4	

Questão 1.

Considere a seguinte FMP

$$p(x) = a + \left(\frac{x}{5}\right)^2$$

com $0 \leq x \leq 3$ e a uma constante real. Determine:

(a) O valor de a para que $p(x)$ seja uma FMP legítima. (1,0 ponto)
(b) A função de probabilidade acumulada desta FMP. (1,0 ponto)
(c) A média e desvio padrão de x. (1,0 ponto)

Solução:

(a) Para termos um f.m.p legítima, devemos ter $p(x) \geq 0$ e $\sum_{x_i} p(x_i) = 1$, então

$$4a + \left(\frac{1}{5}\right)^2 + \left(\frac{2}{5}\right)^2 + \left(\frac{3}{5}\right)^2 = 1$$

$$4a + \frac{1}{25}(1 + 4 + 9) = 1$$

$$4a + \frac{14}{25} = 1$$

$$a = \frac{11}{100}.$$

Como o valor de a que normaliza $p(x)$ é positivo e $\left(\frac{x}{5}\right)^2$ também, então temos $p(x) \geq 0$.

(b) A FDA é dada por

$$F\left(x\right)=\sum_{x\leq x_i}p\left(x_i\right),$$

então temos

$$F\left(x\right)=\begin{cases}0, & x<0\\ \frac{11}{100}, & 0\leq x<1\\ \frac{26}{100}, & 1\leq x<2\\ \frac{53}{100}, & 2\leq x<3\\ 1, & x\geq 3\end{cases}$$

(c) A média de x é dada por

$$E\left(x\right)=\mu_x=\sum_{x_i}x_ip\left(x_i\right)$$

$$\mu_x=0+1\left(\frac{11}{100}+\frac{1}{25}\right)+2\left(\frac{11}{100}+\frac{4}{25}\right)+3\left(\frac{11}{100}+\frac{9}{25}\right)=\frac{210}{100}$$

$$\mu_x=\frac{210}{100}=2,1$$

O desvio padrão $\sigma_x=\sqrt{V\left(x\right)}$,

$$V\left(x\right)=E\left(x^2\right)-E^2\left(x\right)=5,46-4.41$$

$$\sigma_x=\sqrt{V\left(x\right)}\simeq 1,0247$$

Questão 2.

Sob certas condições, um estacionamento tem a entrada de $0,4$ carros por minuto com uma distribuição de Poisson. Considerando que o preço de entrada é único, de R\$ 8, e o custo de funcionamento é fixo em R\$ 0,20 por minuto, determine:
(a) O valor esperado do lucro por hora. (1,5 ponto)
(b) A probabilidade de que 5 ou mais carros entrem em 10 minutos. (1,5 ponto)

Solução:

(a) A função lucro por hora é dada por

$$L(x) = 8x - 12.$$

A taxa de entrada de carros é $\lambda = 0,4/min = 24/h$, então a f.m.p de Poisson será:

$$p(x) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!} = \frac{e^{-24}24^x}{x!},$$

com a qual calculamos o valor esperado do lucro

$$E(L(x)) = E(8x - 12) = 8E(x) - 12,$$

onde o valor esperado do número de carros por hora é

$$E(x) = 24,$$

então

$$E(L(x)) = \text{R\$}180/h.$$

(b) A taxa de entrada em 10 minutos é $\lambda = 0,4/min = 4/10min$. Então queremos a probabilidade $P(X \geq 5)$ com $\lambda = 4$. A f.m.p de Poisson é

$$p(x) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!} = \frac{e^{-4}4^x}{x!}$$

e

$$P(X \geq 5) = 1 - P(X < 5) = 1 - e^{-4}\left(1 + \frac{4}{1!} + \frac{4^2}{2!} + \frac{4^3}{3!}\right) \simeq 0,3712$$

Questão 3.

Considere a seguinte FDP normal

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(x-2)^2}{2}\right).$$

Faça o seguinte:
(a) Identifique sua média e desvio padrão. (1,0 ponto)
(b) Determine a probabilidade acumulada entre a média menos um desvio padrão e a média mais dois desvios padrão (1,0 ponto)
(c) Determine k tal que $P(\mu - k < x < \mu + k) = 0.95$ (1,0 ponto)

Solução:
(a) A forma geral da distribuição normal é:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right),$$

de onde identificamos que a média da FDP em questão é $\mu = 2$ e o desvio padrão é $\sigma = 1$.
(b) Em termos de Z,

$$Z = \frac{x-\mu}{\sigma}$$

queremos calcular

$$P(-1 < z < 2) = F(2) - F(-1)$$

$$P(-1 < z < 2) = 0.8185$$

(c) Em termos de Z, queremos

$$P(-k < z < k) = 0.95$$

$$F(k) - F(-k) = 0.95$$

$$F(k) = 1 - F(-k)$$

$$2F(k) - 1 = 0.95$$

$$F(k) = 0.975$$

$$k = 2$$

Questão 4.

Considere o seguinte experimento: de uma caixa com o total de N bolinhas, com M bolinhas vermelhas e $N - M$ bolinhas azuis, são retiradas, sem reposição, 5 bolinhas. Determine as seguintes probabilidades:
(a) A probabilidade de se retirar 5 bolinhas vermelhas, com $N = 10$ e $M = 5$. (0,5 ponto)
(b) A probabilidade de se retirar 5 bolinhas vermelhas, com $N = 20$ e $M = 10$. (0,5 ponto)
(c) A probabilidade do caso (b), mas agora com reposição das bolinhas. (0,5 ponto)

Solução:

(a) A distribuição em questão é hipergeométrica

$$p\left(x\right) = \frac{\left(\begin{array}{c} M \\ x \end{array}\right)\left(\begin{array}{c} N-M \\ n-x \end{array}\right)}{\left(\begin{array}{c} N \\ n \end{array}\right)} = \frac{\left(\begin{array}{c} 5 \\ x \end{array}\right)\left(\begin{array}{c} 5 \\ 5-x \end{array}\right)}{\left(\begin{array}{c} 10 \\ 5 \end{array}\right)}$$

a probabilidade de retirarmos 5 vermelhas é

$$p\left(5\right) = \frac{\left(\begin{array}{c} 5 \\ 5 \end{array}\right)\left(\begin{array}{c} 5 \\ 0 \end{array}\right)}{\left(\begin{array}{c} 10 \\ 5 \end{array}\right)} = \frac{5!}{5!0!}\frac{5!}{5!0!}\frac{5!5!}{10!} = \frac{5!}{10\cdot 9\cdot 8\cdot 7\cdot 6} = \frac{1}{252} \simeq 0,00397$$

(b) De forma análoga, temos

$$p\left(x\right) = \frac{\left(\begin{array}{c} 10 \\ x \end{array}\right)\left(\begin{array}{c} 10 \\ 5-x \end{array}\right)}{\left(\begin{array}{c} 20 \\ 5 \end{array}\right)}$$

e queremos

$$p\left(5\right) = \frac{\left(\begin{array}{c} 10 \\ 5 \end{array}\right)\left(\begin{array}{c} 10 \\ 0 \end{array}\right)}{\left(\begin{array}{c} 20 \\ 5 \end{array}\right)} = \frac{10!}{5!5!}\frac{10!}{10!0!}\frac{5!15!}{20!} = \frac{10!15!}{5!20!} = \frac{10\cdot 9\cdot 8\cdot 7\cdot 6}{19\cdot 18\cdot 17\cdot 16\cdot} = 0,01625$$

(c) Com reposição, passamos a ter uma distribuição binomial, com $p = M/N = 0.5$

$$p\left(x\right) = \left(\begin{array}{c} n \\ x \end{array}\right) p^{x}\left(1-p\right)^{n-x} = \left(\begin{array}{c} 5 \\ x \end{array}\right)\left(0,5\right)^{5}$$

$$p\left(5\right) = \left(0,5\right)^{5} = 0,03125$$

RASCUNHO