ESCOLA DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA – UFRN
PROVA 1 DE PROBABILIDADE E ESTATÍSTICA – ECT 2207 – Turma 1
6/9/2018

Prof. Ronaldo

Nome Legível:____

Assintatura:____

Instruções:

1. **Leia todas as instruções antes de qualquer outra coisa.**
2. **A resolução das questões pode ser feita com grafite.**
3. **Faça uma prova organizada e detalhada, apresentando as respostas de forma coerente, de modo que todas as justificativas relevantes no contexto da disciplina devem estar presentes na solução. Indique bem o que você está fazendo pois resultados sem explicação e/ou desorganizados não serão considerados.**
4. **Resolva cada questão na frente e/ou verso da folha onde ela se encontra.**
5. **As duas últimas folhas são de rascunho e não serão corrigidas.**

Uso do prof.	
Q1	
Q2	
Q3	
Q4	

Questão 1.

A probabilidade de existência de certa mutação genética A em seres humanos é 1/3, 1/2 para outra mutação B e de 1/4 para que alguém tenha ambas mutações. Determine as seguintes probabilidades:

(a) A probabilidade de uma pessoa ter ao menos uma das mutações. (1,0 ponto)

(b) A probabilidade de uma pessoa ter nenhuma das mutações. (1,0 ponto)

(c) A probabilidade de que alguém com a mutação A também tenha a mutação B e se esses evento são independentes. (1,0 ponto)

Solução:

(a) A probabilidade de que uma pessoa tenha ao menos uma mutação é

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B),$$

então temos

$$P(A \cup B) = \frac{1}{3} + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{7}{12}$$

(b) A probabilidade de uma pessoa ter nenhuma das mutações é complementar de ter alguma, isto é,

$$P(A^c \cap B^c) = 1 - P(A \cup B) = 1 - \frac{7}{12}$$

$$P(A^c \cap B^c) = \frac{5}{12}.$$

(c) A probabilidade de alguém com mutação A ter a mutação B é

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{1/4}{1/3} = \frac{3}{4}.$$

Se esses eventos são independentes, $P\left(B|A\right) = P\left(B\right)$, contudo temos

$$P\left(B|A\right) = \frac{3}{4} \neq P\left(B\right) = \frac{1}{4}$$

Questão 2.

Uma seguradora de carros dividiu seus contratantes em quatro faixas de idade crescente. Na primeira faixa, dos mais jovens, há 10% de seus clientes, na segunda 30%, na terceira 40% e na quarta 20%. As taxas de ocorrência de sinistro são dessas faixa são, respectivamente: 40%, 30%, 25% e de 30% na faixa 4. Determine a probabilidade total de sinistros e a faixa idade que mais gera sinistros e sua participação no total de sinistros. (2,0 pontos)

Solução:
As probabilidades de um cliente estar em uma das quatro faixas são: $P(F_1) = 0,1$, $P(F_2) = 0,3$, $P(F_3) = 0,4$ e $P(F_4) = 0,2$. As probabilidades de ocorrência de sinistro, dada a faixa, são $P(S|F_1) = 0,4$, $P(S|F_2) = 0,3$ e $P(S|F_3) = 0,25$ e $P(S|F_4) = 0,3$. Pelo teorema da probabilidade total, a probabilidade total de sinistro é

$$P(S) = P(F_1)\,P(S|F_1) + P(F_2)\,P(S|F_2) + P(F_3)\,P(S|F_3) + P(F_4)\,P(S|F_4)$$

$$P(S) = (0,1)\,(0,4) + (0,3)\,(0,3) + (0,4)\,(0,25) + (0,2)\,(0,3)$$

$$P(S) = 0,04 + 0,09 + 0,1 + 0,06$$

$$P(S) = 0,29$$

Cada termo da soma representa a probabilidade de sinistro dada a faixa de idade, então a maior contribuição é do termo $P(F_3)\,P(S|F_3)$. Portanto a faixa 3 é a que mais gera sinistros e sua participação no total é

$$\frac{0,1}{0,29} = 0,3448\ .$$

Questão 3.

O seguinte conjunto representa uma amostra de dados $D = \{11, 10, 9, 1, 8, 12, 10, 5\}$, determine:

(a) A média, a moda e a mediana. (1,0 ponto)

(b) Se, segundo da amplitude interquartil, existe algum valor atípico. (1,5 ponto)

Solução:

(a) A média é dada por:

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} = \frac{66}{8} = 8,25.$$

A mediana é o valor que separa o conjunto ordenado em duas partes iguais. Em ordem crescente, temos

$$D = \{1, 5, 8, 9, 10, 10, 11, 12\}.$$

Como temos 8 elementos, temos que tomar a média entre o 4 e 5 elementos e a mediana é dada por:

$$\frac{9 + 10}{2} = 9,5.$$

A moda é o valor mais frequente, que é 10.

(b) Precisamos determinar os primeiro e terceiro quartis, são eles:

$$P\left(Q_1\right) = \frac{1}{4}\left(n + 1\right) = 2,25 \to Q_1 = 5$$

$$P\left(Q_3\right) = \frac{3}{4}\left(n + 1\right) = 6,75 \to Q_3 = 11$$

A amplitude interquartil é

$$AIQ = Q_3 - Q_1 = 6.$$

Procuramos extremos tais que $x \leq Q_1 - 1,5AIQ = -4$ ou $x \geq Q_3 + 1,5AIQ = 20$. Como se vê não há qualquer da amostra nesses intevalos, segundo o critério da amplitude interquartil não há valores extremos.

Questão 4.

Em um tipo de loteria o apostador ganha o prêmio principal se acertar 3 dentre 20 números e há um prêmio especial caso acerte também a ordem de extração de 2 letras de um total de 24. Determine:

(a) As probabilidades acertar o prêmio princial e o especial com uma aposta. (1,0 ponto)

(b) Determine quantos jogos a apostador precisa fazer para que suas chances de ganhar o prêmio principal sejam de pelo menos 10%. (1,5 ponto)

Solução:

(a) O número de combinações possíveis para o prêmio princial é

$$ {}_{20}C_3 = \frac{20!}{3!17!} = 1140. $$

Então a probabilidade de acertar é de

$$ P\left(Pr\right) = \frac{1}{1140} \simeq 0.000878 $$

Para o prêmio especial, a ordem de sorteio das letras importa, então temos permutações de 2 das 24 letras

$$ {}_{24}P_2 = \frac{24!}{22!} = 552, $$

e o número total de possibilidades será $\left({}_{2}P_{24}\right)\left({}_{20}C_3\right)$, então a probabilidade de acertar o prêmio especial com um jogo é

$$ P\left(Es\right) = \frac{1}{1140}\frac{1}{552} = \frac{1}{629280} \simeq 1.59 \times 10^{-6} $$

(b) Queremos um número n de jogos tal que

$$ P\left(\cup_i^n A_i\right) \geq 0,1, $$

onde a probabilidade de acertar um jogo qualquer

$$ P\left(A_i\right) = \frac{1}{1140}. $$

Como essas probabilidades são independentes, podemos escrever

$$ P\left(\cup_i^n A_i\right) = 1 - P\left(\cap_i^n A_i^c\right) = 1 - \left(P\left(A_i^c\right)\right)^n = 1 - \left(1 - \frac{1}{1140}\right)^n = 0,1 $$

$$ \left(1 - \frac{1}{1140}\right)^n = 0,9 $$

$$ n \ln\left(1 - \frac{1}{1140}\right) = \ln\left(0,9\right) $$

$$ n = 120,058 $$

Então, para o jogador ter ao menos 10% de chance, são necessários ao menos 121 jogos.