Probabilidade e Estatística

Aula 4

Probabilidade: Conceitos Básicos

Leituras:

Obrigatória: Devore, Capítulo 2

Complementar: Bertsekas e Tsitsiklis, Capítulo 1

Objetivos

Nesta aula, aprenderemos:

- Experimentos aleatórios
- Espaço Amostral e Eventos
- Revisão de conjuntos
- Definições de Probabilidade
- Regra da adição
- Revisão de técnicas de contagem

Introdução

- Arcabouço para estudos de diversas situações em que nos deparamos com incerteza.
- Probabilidade formaliza a ideia da chance relativa de ocorrência dos diferentes resultados esperados para um fenômeno incerto.

- Exemplos de aplicações:
  - **Tempo de espera em filas:** « existe uma probabilidade alta de que o tempo de espera seja maior do que 5 minutos»
  - **Vida útil de equipamentos:** «é provável que a máquina dure pelo menos 5 anos»
  - **Resultado de um procedimento médico:** «o procedimento tem taxa de sucesso de 60%»

Introdução

Definição!

- Um **experimento aleatório** é um experimento que, ao ser repetido nas mesmas condições, pode fornecer diferentes resultados.
- Exemplos:
  - Jogar um dado e observar a face superior.
  - Selecionar ao acaso um habitante de Natal e medir sua altura em metros.
  - Retirar um lote de peças em um processo de produção e determinar o número de peças defeituosas.
  - Número de chamadas telefônicas que chegam a uma central num intervalo de tempo fixado.

Introdução

- Objetivo da teoria de probabilidade é construir um modelo matemático para representar eventos incertos (experimentos aleatórios) e a chance de ocorrência de possíveis resultados.

- O modelo é construído em duas etapas:

Etapa 1:
Descrição do conjunto de resultados possíveis do experimento aleatório

→

Etapa 2:
Atribuição de pesos que refletem a maior ou menor chance de um resultado acontecer

Espaço Amostral e Eventos

Definição!

- O conjunto de todos os resultados possíveis de um experimento aleatório é chamado **espaço amostral** do experimento. O espaço amostral é denotado por S.

- Requisitos:
  - apenas um resultado possível para cada rodada do experimento
  - nenhum resultado possível fique fora do espaço amostral

Espaço Amostral e Eventos

- **Exemplo 1:** Lançamento de um dado:
  - $S=\{1,2,3,4,5,6\}$. Enumerável e finito.

- **Exemplo 2:** Lançamento de uma moeda até que apareça a primeira cara. C: cara, K: Coroa.
  - $S=\{C, KC, KKC, KKKC, \ldots.\}$. Enumerável e infinito.

- **Exemplo 3:** Lançamento de dardo em alvo com raio 1 (ou ponto em círculo de raio 1)
  - $S=\{(x,y): x^2+y^2<=1\}$. Não-enumerável.

Espaço Amostral e Eventos

Definição!

- Um **evento** é um *subconjunto do espaço amostral*, S, de um experimento aleatório. Os subconjuntos de S são representados pelas letras maiúsculas A, B,....

- O evento é denominado **simples** se consistir num único resultado do espaço amostral.
- O evento é denominado **composto** se consistir em mais de um resultado do espaço amostral.
- O conjunto vazio é denotado por ϕ.

Espaço Amostral e Eventos

- **Exemplo 1:** Lançamento de um dado: $S=\{1,2,3,4,5,6\}$.
  - $A = \{6\}$, $B=\{1\}$: *eventos simples*
  - $C =\{$*faces pares*$\}$, $D=\{$*faces menor ou igual a 3*$\}$: *evento composto.*

- **Exemplo 2:** Uma rede de computadores está em operação contínua, mas falhas podem acontecer a qualquer momento.

  O experimento conta o n° de falhas em um dia, tal que $S=\{0, 1, 2, 3, \ldots\}$.
  - $A = \{$*0 falhas em um dia*$\}$: *evento simples*
  - $B=\{$*menos de 2 falhas em um dia*$\}$: *evento composto*

Eventos e Espaço Amostral

Exercício 1: Considere o experimento que consiste em lançar três moedas e observar a face superior delas.

a) Determine o espaço amostral.

b) Dê um exemplo de evento composto.

Eventos e Espaço Amostral

Exercício 1: Considere o experimento que consiste em lançar três moedas e observar a face superior delas.

a) Determine o espaço amostral.

b) Dê um exemplo de evento composto.

- Solução:

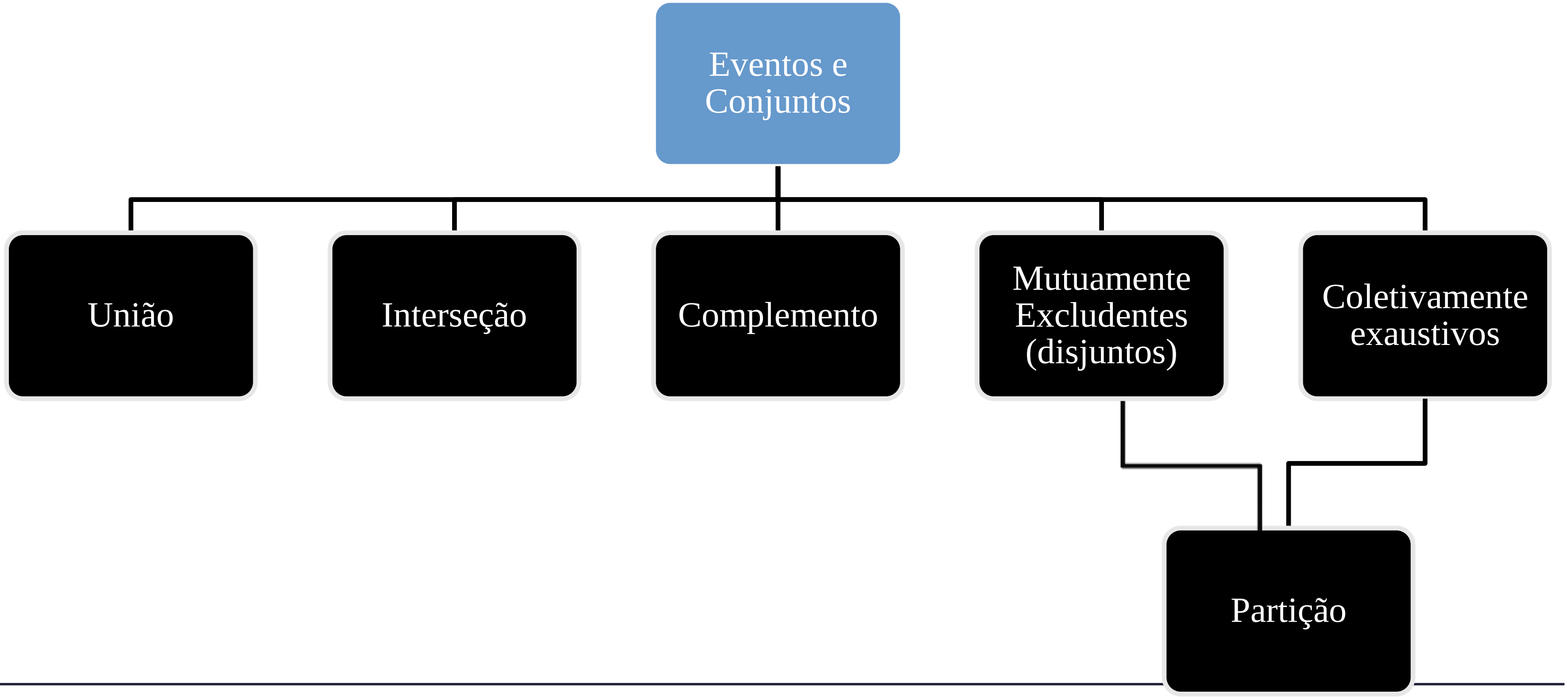
a) S = {CCC, CCK , CKC, KCC, CKK, KCK, KKC, KKK}

b) Ex: A = resultado com 2 caras (C) = {CCK, CKC, KCC}

Ex: B = resultado com mais coroas do que caras ={CKK, KCK, KKC, KKK}

Eventos e Conjuntos

Eventos são subconjuntos do espaço amostral. Vamos revisar algumas operações de conjuntos.



Eventos e Conjuntos

Definição!

- A **união** de dois conjuntos (eventos) A e B é o conjunto (evento) que consiste de todos os resultados que estão no conjunto A ou no conjunto B ou em ambos.

$$A \cup B = \{x \in S : x \in A \ ou \ x \in B\}$$

Definição!

- A **interseção** de dois conjuntos (eventos) A e B é o conjunto que consiste de todos os resultados que estão simultaneamente em A e em B.

$$A \cap B = \{x \in S : x \in A \ e \ x \in B\}$$

Definição!

- O **complemento** de um conjunto (evento) A, representado por A^c (ou A') é o conjunto de todos os resultados que não estão contidos em A.

$$A^c = \{x \in S : x \notin A\}$$

Eventos e Conjuntos

Definição!

- **Eventos mutuamente excludentes** são eventos que **não** podem acontecer **simultaneamente**. Também dizemos eventos **disjuntos.**

- **Exemplo: Experimento - uma carta é selecionada do baralho.**
  - A = "rainha de ouros"; B = "rainha de copas".

    Os eventos A e B são mutuamente excludentes.
  - C = "rainha"; D = "ouros".

    C e D não são mutuamente exlcudentes.
- **Exemplo: Experimento – um feto é gerado**
  - Y = "é menino"; X = "é menina"
  - Os eventos X e Y são mutuamente excludentes se não considerarmos a possibilidade de hermafrodita.

Eventos e Conjuntos

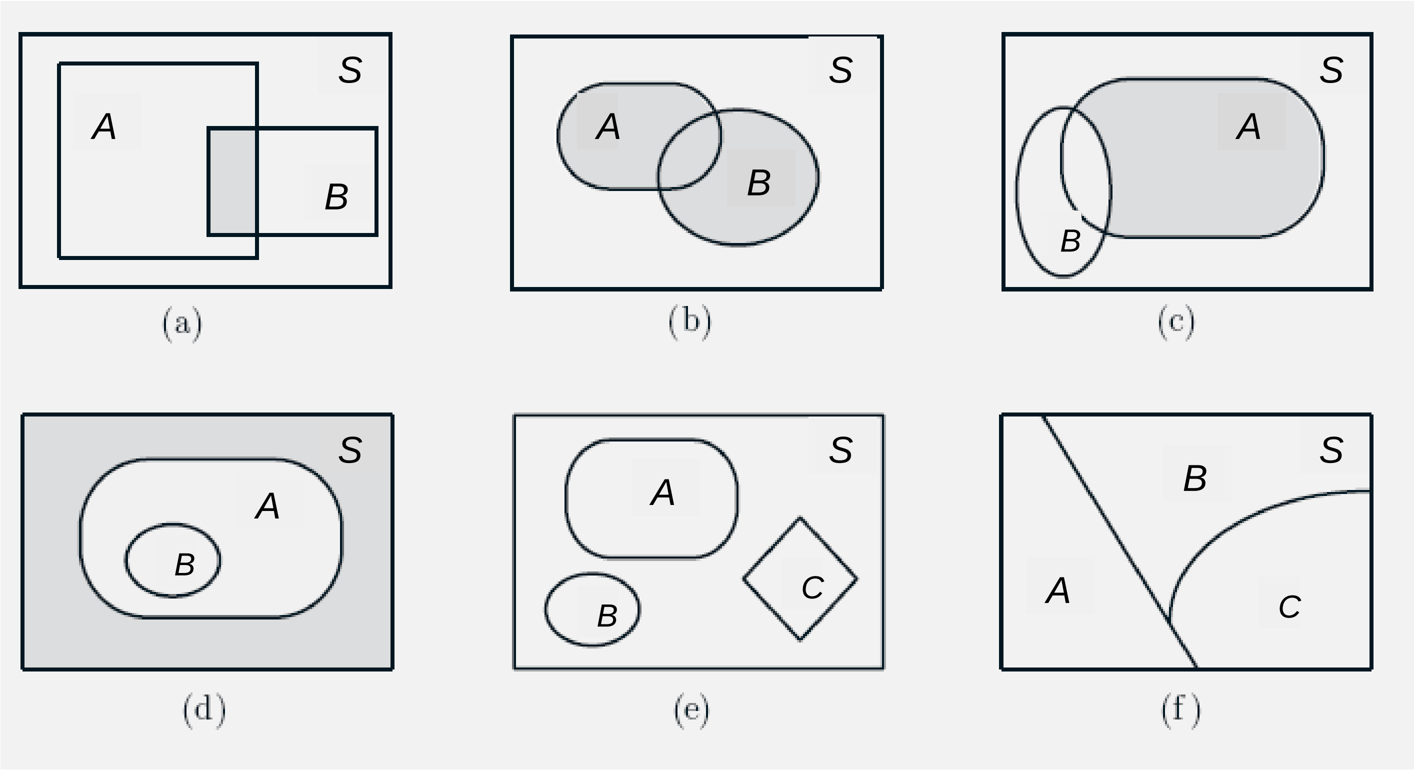
Definição!

- Uma **partição** de um espaço amostral consiste de um conjunto de eventos tais que:
  - Os eventos são **mutuamente excludentes** (apenas um dos eventos pode ocorrer).
  - Os eventos são **coletivamente exaustivos**, i. e, a união dos eventos cobre todo o espaço amostral.

- **Exemplo: Experimento – uma carta é selecionada do baralho.**

  Sejam A = "azes"; B = "cartas pretas"; C = "ouros"; e D ="copas"
  - Os eventos A, B, C e D são coletivamente exaustivos (mas não são mutuamente excludentes)
  - Os eventos B, C e D formam uma partição.

Visualização de conjuntos: Diagramas de Venn



a) $A \cap B$ b)AUB c)$A \cap B^c$ d)A^c e)A,B e C são disjuntos f)A,B e C são partição de S

Eventos e Conjuntos

Exercício: Assuma que S = {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7}, A={0, 1, 2, 3,4}, B={3, 4, 5, 6} e C={1, 3, 5}. Determinar:

- $A \cup B$
- $A \cap B$
- $A \cup C$
- $A \cap C$
- $C \cup B$
- $C \cap B$
- A^c
- B^c
- C^c

Propriedades de Conjuntos

- Operações entre conjuntos têm uma série de propriedades. Exemplos:
  - $A \cup B = B \cup A$ e $A \cap B = B \cap A$
  - $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
  - $(A^c)^c = A$
  - $A \cup S = S$
  - $A \cap A^c = \emptyset$
  - $A \cap S = A$

Propriedades de Conjuntos

- Leis de Morgan:

$$(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$$
$$(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$$

Visualizando Eventos

- Existem diversas formas de representar a ocorrência de eventos

Representações de Eventos

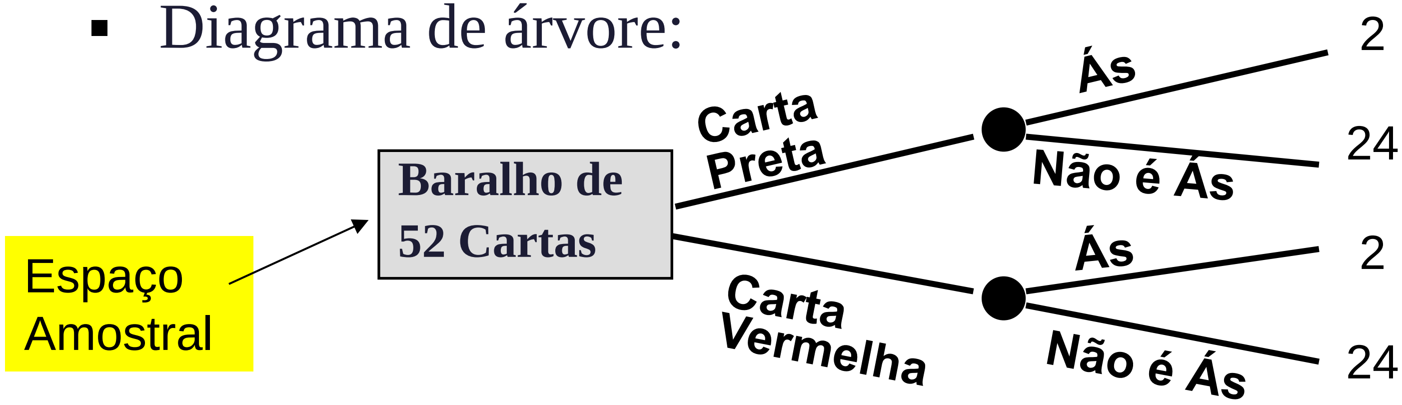
- Diagrama de Venn
- Tabela de contingência ou tabela cruzada
- Diagrama de árvore
- Matriz

Visualizando Eventos

- Tabelas de contigência:

	Ás	Não Ás	Total
Preta	2	24	26
Vermelha	2	24	26
Total	4	48	52

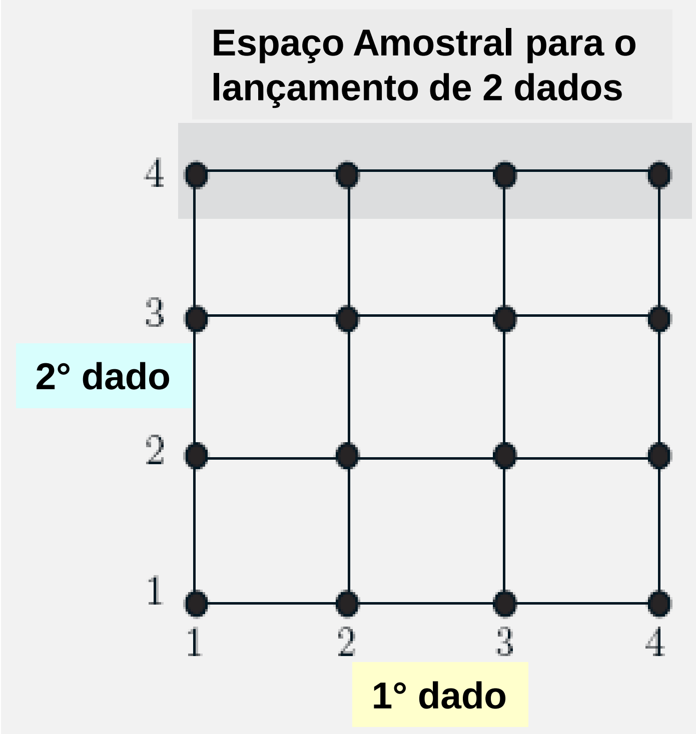
- Diagrama de árvore:



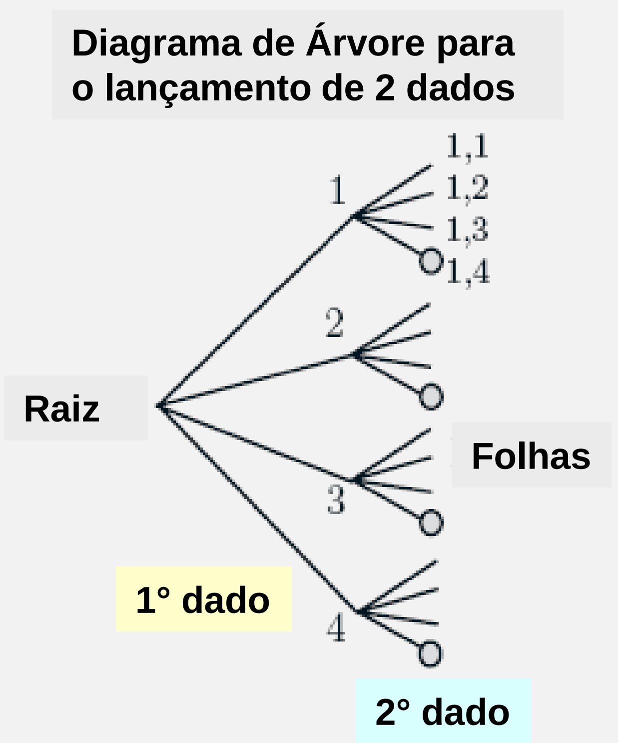
A definição da ordem dos ramos depende do problema!

Visualizando Eventos

- Lançamento de 2 dados de quatro lados:

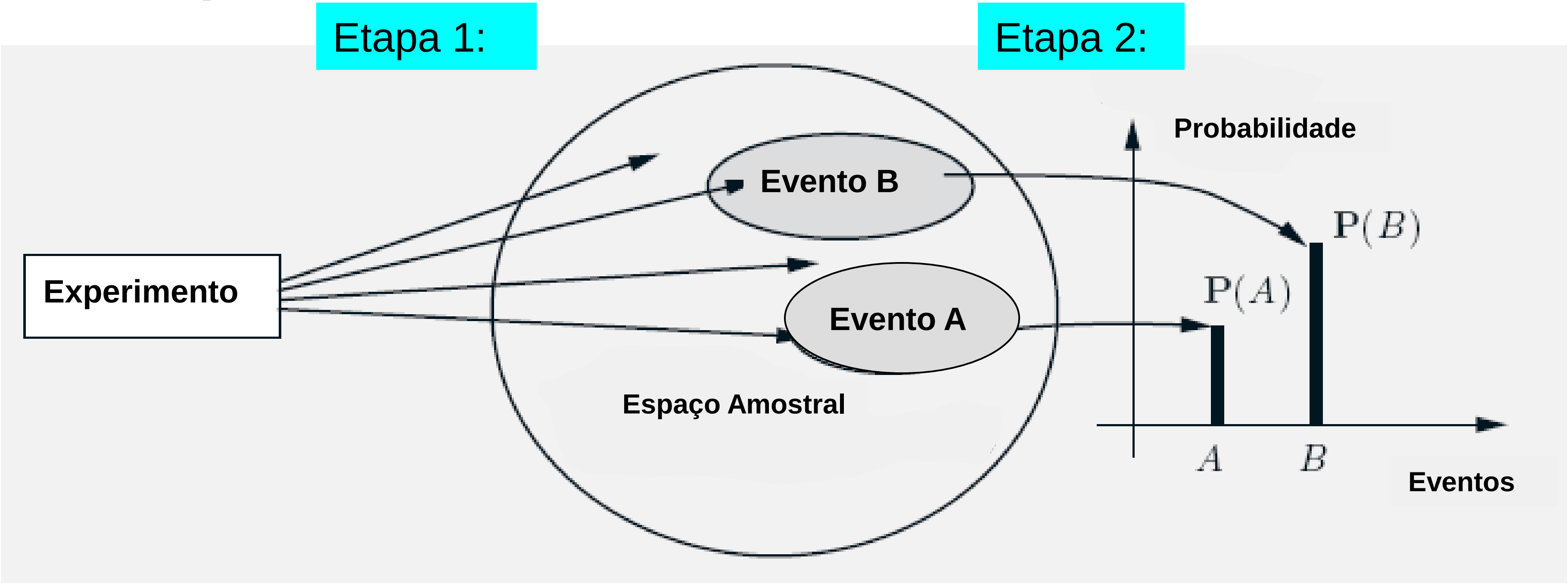


Representação por Matriz



Representação por Árvore

Modelo Probabilístico



Os principais ingredientes de um modelo probabilístico

Probabilidade

- **Probabilidade:** atribuir chance (peso relativo) a eventos possíveis de um experimento aleatório.

- **Diferentes conceitos:**
  - Definição clássica de probabilidade
  - Definição frequentista ou Definição estatística de probabilidade ou Definição Clássica empírica
  - Axiomas de Kolmogorov!

Probabilidade Clássica

- A definição clássica de probabilidade se refere a **subconjuntos unitários e equiprováveis**, isto é, conjuntos de resultados que <u>têm a mesma chance</u>.

- **CASO 1:** No caso *enumerável e finito* em que a chance de sorteio de cada resultado do espaço amostral é a mesma, a probabilidade de um evento A é dada por:

$$P(A) = \frac{n^{\text{o}}\ de\ vezes\ que\ A\ pode\ ocorrer\ em\ S}{n^{\text{o}}\ total\ de\ resultados\ possíveis\ em\ S}$$

Definição!

Use Técnicas de análise combinatória e contagem para determinar o n° total e o n° de vezes que A pode sair.

Probabilidade Clássica

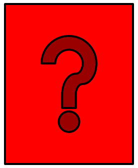
- **CASO 2 (probabilidade geométrica):** Se S é *não-enumerável* e equiprovável (mesma chance para cada resultado), o conceito se aplica ao comprimento de intervalos, medidas de áreas, …

Definição!

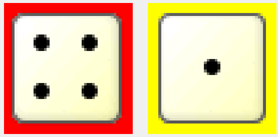
- **Exemplo:** $S = [0,10]$, tal que cada valor pode sair com a mesma chance dos demais. Seja A o subconjunto $[1,2] \cup [6,8]$. Então:

$$P(A) = \frac{Comprimento\ de\ A}{Comprimento\ total\ de\ S} = \frac{1+2}{10} = 0.3$$

Probabilidade Clássica



Exercício: Considere o experimento que consiste no lançamento de 2 dados balanceados e registram-se as faces superiores.



Calcular a probabilidade de:

a) obter soma das faces superiores = 7

b) obter soma das faces superiores maior do que 10

c) que resultado do primeiro dado seja superior ao resultado do segundo.

Probabilidade Clássica

Exercício: Considere o lançamento de 2 dados balanceados.

Total de resultados: 36

- Calcular a probabilidade de:

a) Obter soma 7

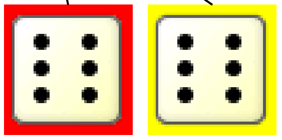
2 resultados possíveis: (3,4), (4,3), (2,5), (5,2), (1,6), (6,1)

P(Soma=7)=6/36

b) Obter soma maior do que 10

3 resultados possíveis: (6,5), (5,6) e (6,6)

P(Soma>10) = 3/36



Probabilidade Clássica

Exercício: Considere o lançamento de 2 dados balanceados.

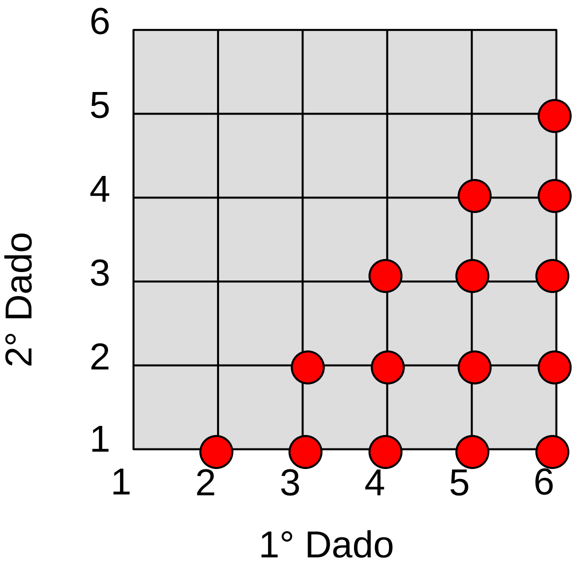
Total de resultados: 36

- Calcular a probabilidade de:

  c) Que resultado do primeiro dado seja superior ao resultado do segundo.

  Resultados possíveis: 15

  P(1°dado>2°dado)=15/ 36



Probabilidade Clássica

- Em termos práticos temos que determinar:
  - O número total de resultados possíveis
  - O número de vezes que podemos ganhar (A)

- CUIDADO: só pode ser aplicado quando todos os resultados do espaço amostral tem a mesma chance de ocorrer!
  - **Exemplos:** dado, moeda, sexo dos filhos
  - **Contra-exemplo:** peso de pessoas (entre 40 e 120)

    chance de (40 a 50 kg) < chance (60 a 70 kg)

    Intervalos com mesmo comprimento, pela probabilidade geométrica devem ter a mesma probabilidade! Não faz sentido para o peso de pessoas!

Probabilidade Frequentista

- A probabilidade frequentista considera o limite de frequências relativas como o valor da probabilidade.

- Seja n_A o número de ocorrência de A em n repetições independentes do experimento. Assim:

$$P(A) = \lim_{n \to \infty} \frac{n_A}{n}$$

Definição!

Assim, definimos a probabilidade como a frequência relativa observada ao repertirmos o experimento um n° muito grande de vezes.

- Exemplo: caixa com 100 moedas e conte o número de caras ou ver applet « probability » do Moore.

Probabilidade Frequentista

- A probabilidade frequentista considera o limite de frequências relativas como o valor da probabilidade.

Na prática:

- repita o experimento aleatório um número grande de vezes, n.
- Conte o nº de vezes que o evento de interesse, A, aconteceu: n_A.
- Então, a probabilidade de o evento acontecer é calculada como:

$$P(A) = \frac{n_A}{n}$$

- É só isso!

Probabilidade Frequentista

Exercício: Encontre a probabilidade de selecionar um aluno de estatística do sexo masculino a partir de uma população descrita na tabela abaixo. Considere que 439 é grande o suficiente para aplicar a probabilidade frequentista!

Neste caso o "experimento" consiste em selecionar uma pessoa da população e em seguida observarmos o sexo e se cursa estatística. O experimento foi repetido 439 vezes.

	Cursando estatística	Não-cursando estatística	Total
Masculino	84	145	229
Feminino	76	134	210
Total	160	279	439

Probabilidade Frequentista

Exercício: Encontre a probabilidade de selecionar um aluno de estatística do sexo masculino a partir de uma população descrita na tabela abaixo:

	Cursando estatística	Não-cursando estatística	Total
Masculino	84	145	229
Feminino	76	134	210
Total	160	279	439

$$P(Homem \cap Estatística) = \frac{nº\ de\ "Homem \cap Estatítica"}{nº\ de\ alunos} = \frac{84}{439} = 0.191$$

Axiomas de Probabilidade de Kolmogorov

- **Axiomas de Kolmogorov:**
  - definição formal de probabilidade
  - incluem as definições acima como casos particulares.

- **Qualquer** função P(.) dos subconjuntos do espaço amostral (eventos) no intervalo [0,1] é uma probabilidade se satisfaz as condições:
  1. (**Não-negatividade**):$P(A \geq 0)$, $\forall$ evento A.
  2. (**Aditividade**): $P\left(\cup_j E_j\right) = \sum_j P(E_j)$, $\forall\left\{E_j\right\}$ eventos disjuntos.
  3. (**Normalização**): $P(S) = 1$

Definição!

Propriedades de uma Probabilidade

Como consequência dos Axiomas de Kolmogorov, mostre que uma função probabilidade satisfaz as seguintes **propriedades**:

1. $P(E^c) = 1 - P(E)$

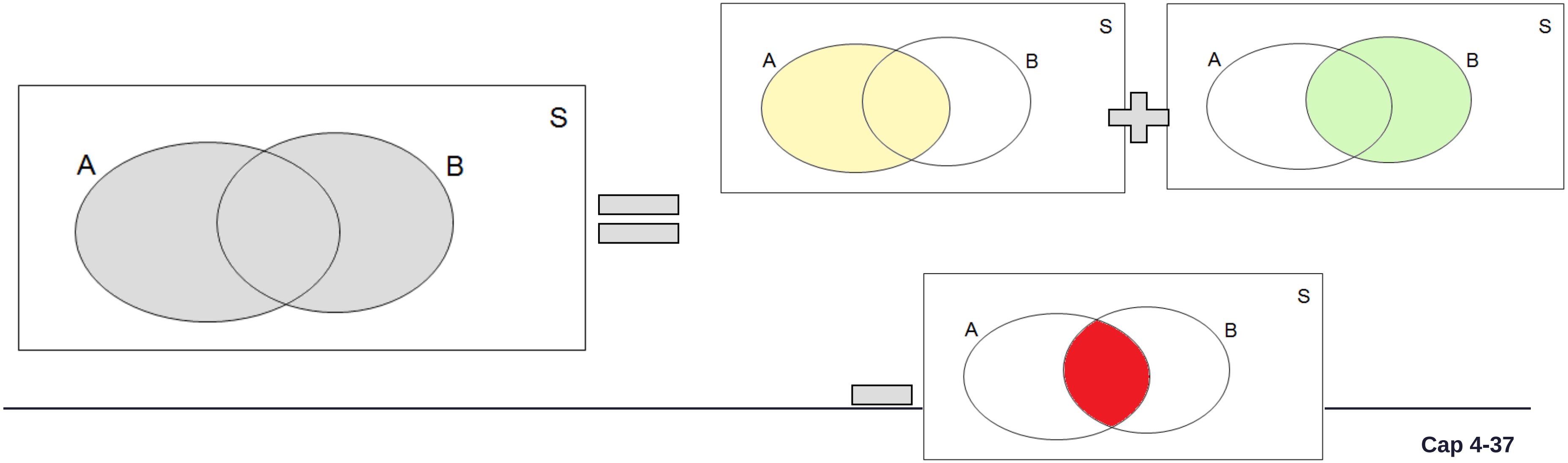
2. Se $E_1 \subseteq E_2$, então $P(E_1) \leq P(E_2)$.

3. $P(\phi) = 0$

Regra Geral da Adição

- Ainda partindo dos axiomas de Kolmogorov, podemos provar a Regra geral da adição:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$



Regra Geral da Adição

- Regra geral da adição:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

- No caso particular em que os eventos são mutuamente excludentes, continua valendo o axioma de aditividade, pois $P(A \cap B) = 0$, daí:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

Exemplo da Regra Geral de Adição

Exercício: Qual a probabilidade de selecionamos aleatoriamente um homem ou um aluno(a) da estatística de uma população descrita pela tabela abaixo?

	Cursando estatística	Não cursando estatística	Total
Homem	84	145	229
Mulher	76	134	210
Total	160	279	439

Exemplo da Regra Geral de Adição

Exercício: Qual a probabilidade de selecionamos aleatoriamente um homem **ou** um aluno(a) da estatística de uma população descrita pela tabela abaixo?

	Cursando estatística	Não cursando estatística	Total
Homem	84	145	229
Mulher	76	134	210
Total	160	279	439

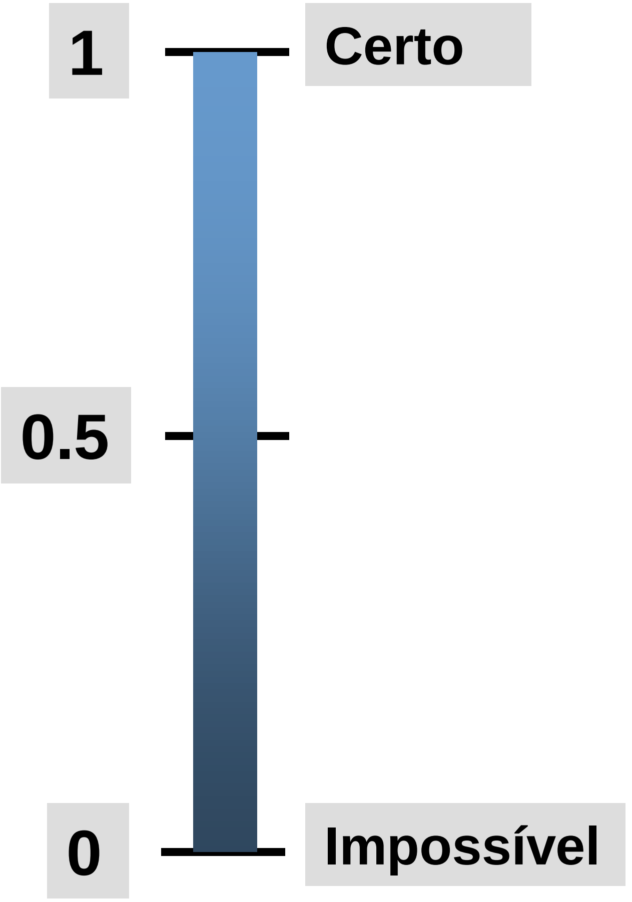
$$P(Homem \ \cup Estatítica) =$$
$$P(Homem) + P(Estatística) - P(Homem \cap Estatistica) = \frac{229}{439} + \frac{160}{439} - \frac{84}{439} = \frac{305}{439}$$

Resumo de Probabilidade

- Probabilidade é uma medida numérica que informa a chance de um resultado ocorrer.

- A probabilidade de um evento deve estar entre 0 e 1, incluindo os extremos.
  - $0 \leq P(A) \leq 1$ para qquer evento A.

- A soma da probabilidade de uma partição do espaço amostral é igual a 1.
  - $P(A) + P(B) + P(C) = 1$
  - em que A, B e C são eventos mutuamente excludentes e coletivamente exaustivos (partição de S).



Exemplo: Probabilidade

- Vocabulário Geral:
  - **"Pelo menos 1 dos eventos":** A, B ou ambos = $A \cup B$
  - **Nenhum dos eventos:** nem A, nem B = $(A \cup B)^c$
  - **Apenas 1 (ex Apenas A):** possui A e não possui B $= A \cap (B^c)$

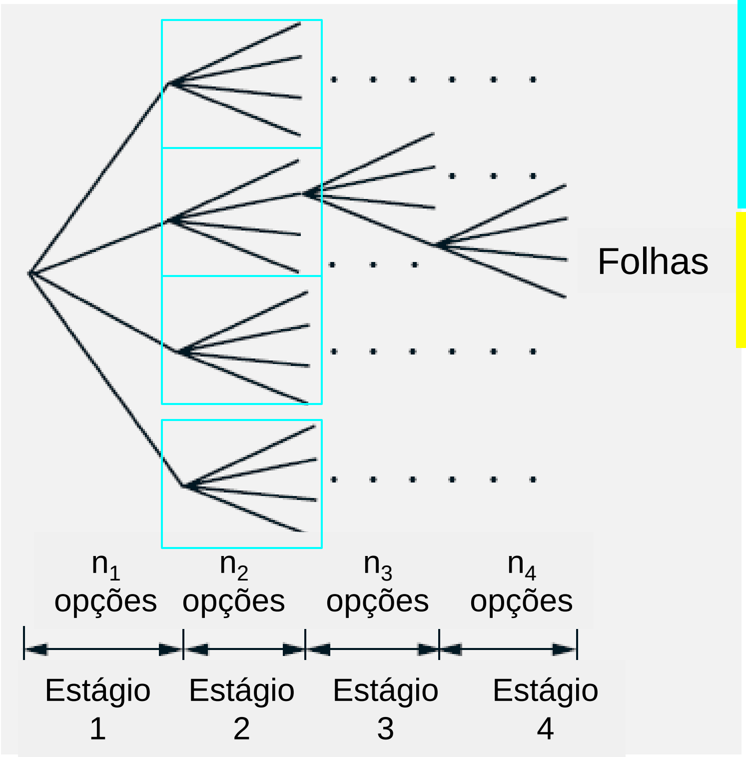
Exercício: Probabilidade

Selecione aleatoriamente um estudante em uma determinada universidade e represente por A o evento dele possuir um cartão de crédito Visa e por B o evento análogo para um Mastercard. Suponha que, P(Visa) = 0.5, P(Mastercard) = 0.4 e P (Ambos os cartões) = 0.25.

1. Calcule a probabilidade de que um indivíduo selecionado tenha pelo menos um dos dois tipos de cartão
2. Qual a probabilidade de o indivíduo selecionado não ter nenhum dos tipos de cartão.
3. Descreva, em termos de A e B, o evento em que o estudante selecionado possui um cartão Visa mas não um MasterCard.
4. Calcule a probabilidade desse evento.

Técnicas de Contagem

- **Princípio de contagem** (divida e conquiste): o processo é quebrado em várias etapas com o uso do diagrama de árvores :



Desde que um mesmo estágio tenha o mesmo nº de opções em cada ponto da árvore:

Número total de folhas é $n_1*n_2*n_3*\ldots*n_i$

Técnicas de Contagem

Teorema

Princípio de contagem:

Considere um processo que contem **r** estágios. Suponha que:

- Existem n_1 resultados possíveis no primeiro estágio
- Para cada resultado possível do estágio 1 existem n_2 resultados possíveis no estágio 2.
- De forma mais geral, para cada um dos resultados n_{i-1} primeiros estágios, existem n_i resultados possíveis no i-ésimo estágio.

- Então o Número total de resultados possíveis no processo de **r** estágios é de: $\mathbf{n_1 * n_2 * n_3 * \ldots * n_r}$

Técnicas de Contagem

Exercício 1: Um número telefônico é composto de 8 dígitos, mas o primeiro dígito apenas assume 3 valores possíveis: 3, 8, 9. Quantos números **distintos** existem?

Técnicas de Contagem

Exercício 1: Um número telefônico é composto de 8 dígitos, mas o primeiro dígito apenas assume 3 valores: 3, 8, 9. Quantos números distintos existem?

- Temos um total de 8 estágios
- No primeiro estágio apenas 3 opções
- Nos demais estágios: 10 opções
- Total: $3 * 10^7$

Técnicas de Contagem

Exercício 2: Quantos subconjutos podemos fazer a partir de um conjunto com n elementos? $\{s_1, s_2, s_3, \ldots, s_n\}$

Técnicas de Contagem

Exercício 2: Quantos subconjutos podemos fazer a partir de um conjunto com n elementos? $\{s_1, s_2, s_3, \ldots, s_n\}$

- Processo de n estágios: em cada estágio decidimos se colocamos ou não o elemento no subconjunto
- número de opções para o primeiro estágio: 2
- Total: $2*2*2*\ldots*2 = 2^n$

Técnicas de Contagem

- **Problema:** Selecionar $\boldsymbol{k}$ objetos de um total de $\boldsymbol{n}$ objetos $(n \geq k)$ sem reposição.

  - Se a ordem é importante: **Arranjo**
    - ex de palavra: "as" é diferente de "sa"

  - Se a ordem não é importante: **Combinação**
    - ex da loteria: escolhemos um conjunto de 6 nº, a ordem em que eles são sorteados não faz diferença

Técnicas de Contagem

- Ao contrário da permutação, na combinação a ordem dos elementos não é importante!

- **Exemplo:**
  - Permutação de 2 elementos das letras A, B, C, D:

  AB, AC, AD, BA, BC, BD, CA, CB, CD DA, DB, DC
  - Combinação de 2 elementos das letras A, B, C, D:

    AB, AC, AD, BC, BD, CD

    já que a ordem não é importante: BA é o mesmo que AB!

Técnicas de Contagem

Teorema

- **Arranjo** de k objetos:

  Queremos selecionar k objetos de um conjunto de n objetos **sem reposição**

  - Para o 1° objeto: n possibilidades
  - Para o 2° objeto: n-1 possibilidades
  - …
  - Para o último (k° objeto): n - (k-1) possibilidades

Total de permutações: $\boldsymbol{n * (n-1) * \cdots * (n-k+1)}$

Ou, usando fatorial: $\dfrac{n!}{(n-k)!}$

Técnicas de Contagem

Exercício 1: Qual o total de "palavras" que podemos construir com exatamente 4 letras distintas (não precisa ter significado nem seguir regras ortográficas)?

Técnicas de Contagem

- Exercício 1: Qual o total de "palavras" que podemos construir com exatamente 4 letras distintas (não precisa ter significado nem seguir regras ortográficas)?

  Solução:

  Selecionar 4 letras de um total de 26 sem repetir. A ordem é importante, pois estamos formando palavras (permutação).

  Total de arranjos de 4 elementos: 26*25*24*23

Técnicas de Contagem

Exercício 2: Você tem 10 CDs de música clássica, 20 CDs de rock e 15 CDs de forró. De quantas formas é possível arranjar os seus CDs tal que os CDs do mesmo tipo sempre fiquem juntos?

Se os CDs forem colocados na prateleira de forma aleatória, qual é a probabilidade de os CDs do mesmo estilo musical ficarem juntos?

Técnicas de Contagem

Exercício 2, Solução: princípio da Contagem + Arranjos

- Podemos quebrar o processo em 2 estágios:
  1) Escolher a ordem dos tipos de Cds: 3*2*1
  2) Escolher a sequência dos Cds para cada tipo:
     - Para Cds de música clássica: 10!
     - Para Cds de rock: 20!
     - Para Cds de forró: 15!

Total: 3!*10!*20!*15!

Técnicas de Contagem

- **Combinação** de k elementos em n
  - Queremos contar o número de subconjuntos de k elementos a partir de um conjunto de n elementos sem reposição.
  - A ordem dos elementos não é importante!
  - Dizemos combinação de n elementos k a k

Teorema

$$N_{combinações} = \binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!\,k!}$$

- Ex: Formar comitê com 3 representantes de turma de um total de 131 alunos.
  - Se todos tem mesmo poder, a ordem de escolha não é importante: combinação.
  - Se teremos presidente, vice-presidente e secretário, então a ordem de escolha é importante: permutação.

Técnicas de Contagem

- Exercício: Qual o número de combinações de 2 elementos distintos que podemos construir com as letras A, B, C, D?

Técnicas de Contagem

- Exercício: Qual o número de combinações de 2 elementos das letras A, B, C, D?

Solução:

$$N_{combinações} = \binom{4}{2} = \frac{4!}{(4-2)!2!} = 6$$

Conferindo:

AB, AC, AD, BC, BD, CD

Técnicas de Contagem

- Exercício: Um armazém da universidade recebeu 25 impressoras, das quais 10 são a laser e 15 a jato de tinta. Se 6 das 25 forem selecionadas aleatoriamente para para serem verificadas por um técnico, qual será a probabilidade de exatamente 3 delas serem a laser?

Técnicas de Contagem

- Solução: Seja D_3= {3 das 6 selecionadas são a laser}. Como a seleção das impressoras dentre as 25 é aleatória, cada uma delas tem a mesma chance de ser sorteada. Probabilidade clássica implica $P(D_3) = n(D_3)/n$.
- Como a ordem da seleção das impressoras não importa, $n = \binom{25}{6}$.
- Para determinar D_3 vamos dividir o processo em duas etapas. 1) selecionamos 3 das 15 impressoras a tinta; e 2) selecionamos 3 das 6 impressoras a laser. Para cada elemento da primeira etapa, temos exatamente o mesmo nº de possibilidades da segunda etapa. Pelo princípio da contagem: $n(D_3) = n_1(D_3) * n_2(D_3)$.
- Como a ordem em que as impressoras são selecionadas em cada etapa não tem importância: $n_1(D_3) = \binom{15}{3}$ e $n_2(D_3) = \binom{6}{3}$.
- Então:

$$P(D_3) = \frac{\binom{15}{3}\binom{6}{3}}{\binom{25}{6}} = 0.3083$$

- Desafio: P(ao menos 3 das 6 selecionadas sejam a laser).

Resumo

- Nesta aula, vimos:
- Como representar um modelo de probabilidade para uma situação incerta (experimento aleatório)
  - Etapa 1: definição do espaço amostral
    - Revisão de conjuntos
  - Etapa 2: especificação de uma função probabilidade que atribui pesos para a chance relativa de cada resultado do espaço amostral.
    - 3 conceitos de probabilidade
      - Probabilidade clássica
      - Probabilidade Frequentista
      - Axiomas de Kolmogorov
    - Revisão de técnicas de contagem para podermos calcular probabilidades.
- Na próxima aula veremos como incorporar informações novas ao cálculo de probabilidade => Probabilidade condicional.