Pré-Cálculo – ECT2101
Slides de apoio: Fundamentos

Prof. Ronaldo Carlotto Batista

20 de março de 2023

Conjuntos

Um conjunto é coleção de objetos, chamados de elememtos do conjunto. Nomeraremos conjuntos por letras maiúsculas e objetos por letras minúsculas. Se um objeto x pertence a um conjunto A expressamos

$$x \in A \, ,$$

do contrário,

$$x \notin A \, .$$

Podemos definir um conjunto elencando todos seus elementos:

$$A = \{1, 3, 5, 7, 11\} \; .$$

Conjuntos

Além de especificar os elementos um a um, podemos definir um conjunto declarando alguma propriedade de seus elementos. Por exemplo,

$$A = \{x | \text{ é um número primo}\} .$$

Um objeto que não goze dessa propriedade não pertence ao conjunto, e.g.,

$$27 \notin A .$$

Conjuntos

Um conjunto sem elementos é chamado de conjunto vazio, representado por

$$\{\} \text{ ou } \emptyset\,.$$

O conjunto do números naturais será representado por

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, \ldots\}\ .$$

Conjuntos

Um conjunto sem elementos é chamado de conjunto vazio, representado por

$$\{\} \text{ ou } \emptyset \,.$$

O conjunto do números naturais será representado por

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, \ldots\} \ .$$

- Exemplo:
  Determine todos elmentos do seguinte conjunto

$$A = \{x | x \in \mathbb{N}, x < 20, x \geq 12\} \ .$$

Conjuntos

Definição

Subconjunto:
Quando todos elementos de um conjunto A percentem a outro conjunto B, dizemos que A é subconjunto de B, o que é expresso na forma:

$$A \subset B\,.$$

Conjuntos

Definição

Subconjunto:
Quando todos elementos de um conjunto A percentem a outro conjunto B, dizemos que A é subconjunto de B, o que é expresso na forma:

$$A \subset B\,.$$

- Exemplo 1:
  Seja $A = \{x|x = 2y, y \in \mathbb{N}, y < 10\}$ e $B = \{x|x \in \mathbb{N}, x < 30\}$. Determine se $A \subset B$ ou $B \subset A$.

Conjuntos

Definição

Subconjunto:
Quando todos elementos de um conjunto A percentem a outro conjunto B, dizemos que A é subconjunto de B, o que é expresso na forma:

$$A \subset B\,.$$

- Exemplo 1:
  Seja $A = \{x|x = 2y, y \in \mathbb{N}, y < 10\}$ e $B = \{x|x \in \mathbb{N}, x < 30\}$. Determine se $A \subset B$ ou $B \subset A$.
- Exemplo 2:
  Mostre que $\emptyset$ está contido em qualquer conjunto A.

Conjuntos

Propriedades:

1. $A \subset A$.
2. Se $A \subset B$ e $B \subset A$, então $A = B$.
3. Se $A \subset B$ e $B \subset C$, então $A \subset C$.

Definição

Conjunto das Partes:
Dado um conjunto A, indicamos por $\mathcal{P}(A)$ o conjunto cujos elementos são as partes de A.

Conjuntos

Propriedades:

1. $A \subset A$.
2. Se $A \subset B$ e $B \subset A$, então $A = B$.
3. Se $A \subset B$ e $B \subset C$, então $A \subset C$.

Definição

Conjunto das Partes:
Dado um conjunto A, indicamos por $\mathcal{P}(A)$ o conjunto cujos elementos são as partes de A.

- Exemplo 1:
  Seja $A = \{1, 2, 3\}$, determine $\mathcal{P}(A)$.

Conjuntos - Operações

1. União: a união de dois conjuntos A e B é conjunto denotado por $A \cup B$, que contém todos elementos de A e todos elementos de B, isto é,
$$A \cup B = \{x | x \in A \text{ ou } x \in B\} \ .$$
2. Interseção: a interseção de dois conjuntos A e B é o conjunto denotado por $A \cap B$, que contém todos elementos comuns a A e B, isto é,
$$A \cap B = \{x | x \in A \text{ e } x \in B\} \ .$$
3. Diferença: a diferença entre dois conjuntos A e B é o conjunto denotado por $A - B$, que contém todos elementos de A que não percentem a B, isto é,
$$A - B = \{x | x \in A \text{ e } x \notin B\} \ .$$
4. Diferença simétrica: $A \Delta B = (A - B) \cup (B - A)$.

Conjuntos - Operações

Definições

i) Conjuntos disjuntos: se $A \cap B = \emptyset$, A e B são ditos disjuntos.
ii) Conjunto complementar: quanto $B \subset A$, defini-se o conjunto complementar de B em relação a A como
$C_A^B = A - B$
iii) Conjunto universo: é o conjunto denotato por U, que contém todos elementos de um dado contexto.

Conjuntos - Operações

- Exemplo 1:
  Sejam $A = \{1, 2, 4\}$ e $B = \{0, 1, 2, 4, 6, 9\}$, determine, caso possível, C_A^B e C_B^A.

Conjuntos - Operações

- Exemplo 1:
  Sejam $A = \{1, 2, 4\}$ e $B = \{0, 1, 2, 4, 6, 9\}$, determine, caso possível, C_A^B e C_B^A.
- Exemplo 2:
  Sejam $A = \{1, 2, 4, 7\}$ e $B = \{1, 3, 6, 7, 10\}$, determine $A \Delta B$.

Conjuntos - Operações

- Exemplo 1:
  Sejam $A = \{1, 2, 4\}$ e $B = \{0, 1, 2, 4, 6, 9\}$, determine, caso possível, C_A^B e C_B^A.
- Exemplo 2:
  Sejam $A = \{1, 2, 4, 7\}$ e $B = \{1, 3, 6, 7, 10\}$, determine $A \Delta B$.
- Exemplo 3:
  Notação: complementar em relação ao universo $A' = C_U^A$

Conjuntos Numéricos

- Conjunto dos Números Naturais: $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, ...\}$
- Conjunto dos Números Inteiros:
  $\mathbb{Z} = \{..., -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3...\}$
- Conjunto dos Números Racionais:

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{p}{q} | p \in \mathbb{Z} \text{ e } q \in \mathbb{Z}^* \right\},$$

onde $\mathbb{Z}^* = \mathbb{Z} - \{0\}$ e p/q é irredutível.

Sobre a impossibilidade de $\sqrt{2}$ ser racional...

Conjuntos Numéricos

- Conjunto dos Números Irracionais: são números que não podem ser representados como fração, por exemplo

$$\mathbb{I} = \mathbb{Q}' = \left\{\pi, e, \sqrt{2}, \phi, \ldots\right\}$$

- Conjunto dos Números Reais: $\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{I}$
- Conjunto do Números Complexos:
  $\mathbb{C} = \{z = a + ib | a, b \in \mathbb{R}\}$, onde $i^2 = -1$

Conjuntos Numéricos - Propriedades de Corpo

Um corpo é formado por conjunto K com operações de soma e multiplicação, que fatisfazem as seguintes propriedades:
Propriedades da adição

1. Associatividade: para quaisquer $x, y, z \in K$, tem-se $(x + y) + z = x + (y + z)$.
2. Comutatividade: para quaiser $x, y \in K$, tem-se $x + y = y + x$.
3. Elemento neutro: existe um elemento $0 \in K$ tal que $x + 0 = x$ para todo $x \in K$.
4. Elemento simétrico: todo elemento $x \in K$ possui um simétrico $(-x) \in K$ tal que $x + (-x) = 0$

Conjuntos Numéricos - Propriedades de Corpo

Propriedade da multiplicação

1. Associatividade: para quaisquer $x, y, z \in K$, tem-se $(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$.
2. Comutatividade: para quaisquer $x, y \in K$, tem-se $x \cdot y = y \cdot x$.
3. Elemento neutro: existe um elmento $1 \in K$, tal que $1 \neq 0$ e $x \cdot 1 = x$ para qualquer $x \in K$.
4. Inverso multiplicativo: para todo $x \neq 0 \in K$ possui um elemento $x^{-1} \in K$, tal que $x \cdot x^{-1} = 1$.

Propriedade distributiva:

1. Para quaisquer $x, y, z \in K$, tem-se $(x + y) \cdot z = x \cdot z + y \cdot z$.

Conjuntos Numéricos - Intervalos

Uma notação bastante útil para denotar subconjuntos dos reais é a de intervalos na reta real. Para dois números reais a e b, tais que $b > a$, vamos representar os seguintes conjuntos como os seguintes intervalos:

$$A = \{x | x \in \mathbb{R},\ x \geq a, x \leq b\} = [a, b]$$

$$B = \{x | x \in \mathbb{R},\ x > a, x \leq b\} = (a, b]$$

$$C = \{x | x \in \mathbb{R},\ x \geq a, x < b\} = [a, b)$$

$$D = \{x | x \in \mathbb{R},\ x > a, x < b\} = (a, b)$$

Potenciação

Tomar a potência n de um número a é multiplicá-lo por si mesmo n vezes:

$$a^n = \underbrace{a \cdot a ... a \cdot a}_{n \text{ vezes}}$$

Propriedades:

1. $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$
2. $(a^m)^n = a^{m \cdot n}$
3. $(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$
4. $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$
5. $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$
6. $a^0 = 1$

Raízes

A raíz quadrada de um número não negativo a é um número não negativo b, tal que

$$b^2 = a,$$

este número b é denotado por

$$b = \sqrt{a}\,.$$

A enésima raíz de um número a é um número b, tal que

$$\sqrt[n]{a} = b^n\,.$$

Propriedades:

1. $\sqrt{a} = a^{1/2}$
2. $\sqrt[n]{a} = a^{1/n}$ com $n > 0$
3. $\sqrt[n]{a^m} = a^{m/n}$ com $n > 0$

Módulo

O módulo de um número real x é dado por

$$|x| = \sqrt{x^2}\,.$$

Propriedades:

1. $|x| \geq 0$
2. $|x| = |-x|$
3. $|xy| = |x||y|$
4. $\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}$

Polinômios

Um polinômio de grau n em x é dado por

$$P_n(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i (x)^i \ .$$

Onde os a_i são constantes reais, com $a_n \neq 0$. Por exemplo, um polinômio de grau três geral é forma:

$$P_3(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 \,.$$

Equações polinomiais

Frequentemente é necessário resolver equações polinomiais, que, em geral podem ser expressas na forma:

$$P_n(x) = 0 \, .$$

Teorema

Todo polinômio $P_n(x)$, com $n \geq 1$, possui n valores $x_i \in \mathbb{C}$, que podem ser degenerados, tais que $P(x_i) = 0$.

Equações polinomiais

- Exemplo 1:
  Resolva a equação $P_1(x) = 0$ e $|P_1(x)| = b$.

Equações polinomiais

- Exemplo 1:
  Resolva a equação $P_1(x) = 0$ e $|P_1(x)| = b$.
- Exemplo 2:
  Resolva a equação $P_2(x) = 0$. Suas soluções são sempre reais?

Equações polinomiais

- Exemplo 1:
  Resolva a equação $P_1(x) = 0$ e $|P_1(x)| = b$.
- Exemplo 2:
  Resolva a equação $P_2(x) = 0$. Suas soluções são sempre reais?
- Exemplo 3:
  Resolva a equação $P_3(x) = 0$, com $a_0 = 0$. Suas soluções são sempre reais?

Equações polinomiais

Dica para encontrar soluções num caso mais geral. Seja

$$P(x) = (x - a)(x - b)(x - c) \; ,$$

então as soluções de $P(x) = 0$ são a, b e c. Temos que

$$P(x) = x^3 - ax^2 - bx^2 + abx - cx^2 + acx^2 + bcx^2 - abc \, .$$

Note que o último termo é múltiplo das soluções.

Equações polinomiais

Dica para encontrar soluções num caso mais geral. Seja

$$P(x) = (x - a)(x - b)(x - c) ,$$

então as soluções de $P(x) = 0$ são a, b e c. Temos que

$$P(x) = x^3 - ax^2 - bx^2 + abx - cx^2 + acx^2 + bcx^2 - abc .$$

Note que o último termo é múltiplo das soluções.

- Exemplo:
  Encontre as soluções de $x^3 - 3x^2 - 4x + 12 = 0$.

Divisão de Polinômios

Dividir um polinômio $P(x)$ por outro $D(x)$ permite expressar $P(x)$ na seguinte forma:

$$P(x) = D(x)\,Q(x) + R(x)\ ,$$

onde $Q(x)$ é o quociente e $R(x)$ o resto.

Divisão de Polinômios

Dividir um polinômio $P(x)$ por outro $D(x)$ permite expressar $P(x)$ na seguinte forma:

$$P(x) = D(x)\,Q(x) + R(x)\ ,$$

onde $Q(x)$ é o quociente e $R(x)$ o resto.

- Exemplo 1:
  Efetue a seguinte divisão

$$\frac{6x^2 - 26x + 12}{x - 4}\,.$$

Divisão de Polinômios

Dividir um polinômio $P(x)$ por outro $D(x)$ permite expressar $P(x)$ na seguinte forma:

$$P(x) = D(x)\,Q(x) + R(x) \ ,$$

onde $Q(x)$ é o quociente e $R(x)$ o resto.

- Exemplo 1:
  Efetue a seguinte divisão
  $$\frac{6x^2 - 26x + 12}{x - 4} \, .$$
- Exemplo 2:
  Seja c uma raíz de $P = x^3 - 7x + 6$, determine-a por tentativa, expresse $P = (x - c)\,Q$ e encontre as raízes de Q.

Inequações

Inequação é uma expressão do tipo

$$f(x) > a,$$

$f(x)$ é alguma expressão dependente de x real, e a um número real. Resolver uma inequação é determinar algum intervalo de x que a satisfaz. Para resolver uma inequação, devemos observar as seguintes propriedades para números reais a, b, c e d:

1. $a \leq b \Leftrightarrow a + c \leq b + c$
2. Se $c > 0$, então $a \leq b \Leftrightarrow ac \leq bc$
3. Se $c < 0$, então $a \leq b \Leftrightarrow ac \geq bc$
4. Se $a > 0$ e $b > 0$, então $a \leq b \Leftrightarrow \frac{1}{a} \geq \frac{1}{b}$
5. Se $a \leq b$ e $c \leq d$, então $a + c \leq b + d$

Inequações

- Exemplo 1:
  Resolva a inequação $3x < 9x + 4$

Inequações

- Exemplo 1:
  Resolva a inequação $3x < 9x + 4$
- Exemplo 2:
  Resolva a inequação $|3x - 2| > 1$

Inequações

- Exemplo 1:
  Resolva a inequação $3x < 9x + 4$
- Exemplo 2:
  Resolva a inequação $|3x - 2| > 1$
- Exemplo 3:
  Resolva a inequação $x^2 \leq 5x - 6$

Inequações

- Exemplo 1:
  Resolva a inequação $3x < 9x + 4$
- Exemplo 2:
  Resolva a inequação $|3x - 2| > 1$
- Exemplo 3:
  Resolva a inequação $x^2 \leq 5x - 6$
- Exemplo 4:
  Resolva a inequação $\frac{x+1}{x-1} \geq 1$