Matemática Básica e Modelagem ECT3101 Slides de apoio: Funções Algébricas

Prof. Ronaldo Carlotto Batista

5 de junho de 2025

Produto Cartesiano

Definição

Sejam dois conjuntos não vazios A e B, o produto cartesiano entre A e B é dado por:

$$A \times B = \{(x, y) \, | x \in A, y \in B\} \ ,$$

onde (x, y) é dito um par ordenado.

Além desta definição, podemos definir que se A ou B são vazios, então $A \times B = \emptyset$.

Produto Cartesiano

Definição

Sejam dois conjuntos não vazios A e B, o produto cartesiano entre A e B é dado por:

$$A \times B = \{(x, y) \, | x \in A, y \in B\} \ ,$$

onde (x, y) é dito um par ordenado.

Além desta definição, podemos definir que se A ou B são vazios, então $A \times B = \emptyset$.

- Ex. 1
  Seja $A = \{0, 1, 2\}$ e $B = \{-1, 0, 1\}$, determine $A \times B$.

Produto Cartesiano

Definição

Sejam dois conjuntos não vazios A e B, o produto cartesiano entre A e B é dado por:

$$A \times B = \{(x, y) \, | x \in A, y \in B\} \ ,$$

onde (x, y) é dito um par ordenado.

Além desta definição, podemos definir que se A ou B são vazios, então $A \times B = \emptyset$.

- Ex. 1
  Seja $A = \{0, 1, 2\}$ e $B = \{-1, 0, 1\}$, determine $A \times B$.
- Ex. 2
  Seja $A = (0, 1]$ e $B = [0, 3)$, represente graficamente $A \times B$ e $B \times A$.

Definição de Função

- Uma função é uma regra que leva elementos de um conjunto A em elementos de um conjunto B. Essa regra deve ser tal que, para cada elemento $x \in A$, associe-se um único elemento $y \in B$.
- O conjunto A é o domínio da função $f : D_f = A$
- O conjunto B é contra-domínio de f.
- O subconjunto de B que contém apenas os valores gerados pela função é a imagem, indicado por I_f.
- Em geral, vamos tratar de funções que levam números reais em número reais:

$$f : A \to B \,, \quad A \subset \mathbb{R}, \quad B \subset \mathbb{R}$$

Definição de Função

- O gráfico de uma função é dado pelo conjunto

$$G = \{(x, y) \,|x \in A, y = f(x)\}$$

- Dado o gráfico de uma possível função f, podemos verificar se essa regra é de fato uma função fazendo o teste da Reta Vertical. Se existir uma reta $x = a$ que corte o gráfico de $f(x)$ mais que uma vez, então $f(x)$ não é função.

Definição de Função

- O gráfico de uma função é dado pelo conjunto

$$G = \{(x, y) \,|x \in A, y = f(x)\}$$

- Dado o gráfico de uma possível função f, podemos verificar se essa regra é de fato uma função fazendo o teste da Reta Vertical. Se existir uma reta $x = a$ que corte o gráfico de $f(x)$ mais que uma vez, então $f(x)$ não é função.
- Exemplo: Usando o teste da reta vertical mostre que $y^2 + x^2 = 4$ não é função.

Função de primeiro grau

A função de primeiro grau, ou linear, ou afim, é dada por:

$$f(x) = ax + b,$$

onde a é o coeficiente angular da reta. Dado o gráfico de uma função linear, podemos identificar os coeficientes b e a:

$$b = f(0) \ ,$$

$$a = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \ .$$

Função de segundo grau

A função de segundo grau é dada por:

$$f\left(x\right) = ax^2 + bx + c.$$

Suas raízes são dadas por

$$x = \frac{1}{2a}\left[-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}\right].$$

Seu vértice é dado por

$$x = -\frac{b}{2a}$$

Função de segundo grau

A função de segundo grau é dada por:

$$f(x) = ax^2 + bx + c.$$

Suas raízes são dadas por

$$x = \frac{1}{2a}\left[-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}\right].$$

Seu vértice é dado por

$$x = -\frac{b}{2a}$$

- Exemplo: Faça o gráfico da função $f(x) = x^2 - 2x + 1$ entre os valores de x onde $f(x) = g(x) = x + 1$.

Funções definidas por partes:

Um exemplo de uma função definida por partes é a Função Módulo, dada por:

$$|x| = \begin{cases} x & \text{se } x \geq 0 \\ -x & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

- Exemplo 1: Faça o gráfico e determine o domínio e a imagem $f(x) = |x+1| - 1$.

Funções definidas por partes:

Um exemplo de uma função definida por partes é a Função Módulo, dada por:

$$|x| = \begin{cases} x & \text{se } x \geq 0 \\ -x & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

- Exemplo 1: Faça o gráfico e determine o domínio e a imagem $f(x) = |x+1| - 1$.
- Exemplo 2: Faça o gráfico e determine o domínio e a imagem

$$f(x) = \begin{cases} -x & , \quad x < 0 \\ x^2 & , \quad 0 < x < 1 \\ 1 & , \quad x \geq 1 \end{cases}$$

Função Potência

Uma função potência é dada por:

$$f(x) = kx^a\,,$$

onde $k \in \mathbb{R}$ e $a \in \mathbb{Q}$. O comportamento desse tipo de função é determinado pelo expoente a. Alguns casos são:

- $a > 1$. Exemplos:

$$y = x^2\,,\quad y = x^3\,,\quad y = x^4\,,\quad y = x^5\,,\quad y = x^{3/2}\,.$$

Função Potência

Uma função potência é dada por:

$$f(x) = kx^a\,,$$

onde $k \in \mathbb{R}$ e $a \in \mathbb{Q}$. O comportamento desse tipo de função é determinado pelo expoente a. Alguns casos são:

- $a > 1$. Exemplos:

$$y = x^2\,,\ \ y = x^3\,,\ \ y = x^4\,,\ \ y = x^5\,,\ \ y = x^{3/2}\,.$$

- $a < 0$. Exemplos:

$$y = x^{-1}\,,\ \ y = x^{-2}\,.$$

Função Potência

Uma função potência é dada por:

$$f(x) = kx^a \, ,$$

onde $k \in \mathbb{R}$ e $a \in \mathbb{Q}$. O comportamento desse tipo de função é determinado pelo expoente a. Alguns casos são:

- $a > 1$. Exemplos:

$$y = x^2 \, , \quad y = x^3 \, , \quad y = x^4 \, , \quad y = x^5 \, , \quad y = x^{3/2} \, .$$

- $a < 0$. Exemplos:

$$y = x^{-1} \, , \quad y = x^{-2} \, .$$

- $0 < a < 1$. Exemplos:

$$y = x^{1/2} \, , \quad y = x^{2/3} \, .$$

Função Polinomial

A formal geral de uma função polinomial é:

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x^1 + a_0 x^0 \, .$$

Onde $n \in \mathbb{N}$ define o grau do polinômio. Um função polinomial pode ter até n raízes reais.
Por exemplo,

$$f(x) = x^4 + 2x^3 - x^1 + 1 \, ,$$

é um função polinomial de quarto grau.

Função Par & Função Ímpar

- Função Par:
  Uma função $f(x)$ é Par se, para todo seu domínio,
  $$f(-x) = f(x) \ .$$
  Exemplos: $x^2 \,, \quad x^4 \,, \cos(x) \ .$
- Função Ímpar:
  Uma função $g(x)$ é Ímpar se, para todo seu domínio,
  $$g(-x) = -g(x) \ .$$
  Exemplos: $x \,, \quad x^3 \,, \operatorname{sen}(x) \ .$

Exemplos

Para as funções abaixo, faça um esboço de seu gráfico, determine domínio, imagem e paridade.

- Exemplo 1: $f(x) = x^3$.

Exemplos

Para as funções abaixo, faça um esboço de seu gráfico, determine domínio, imagem e paridade.

- Exemplo 1: $f(x) = x^3$.
- Exemplo 2: $f(x) = \sqrt{x}$.

Exemplos

Para as funções abaixo, faça um esboço de seu gráfico, determine domínio, imagem e paridade.

- Exemplo 1: $f(x) = x^3$.
- Exemplo 2: $f(x) = \sqrt{x}$.
- Exemplo 3: $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$.

Exemplos

Para as funções abaixo, faça um esboço de seu gráfico, determine domínio, imagem e paridade.

- Exemplo 1: $f(x) = x^3$.
- Exemplo 2: $f(x) = \sqrt{x}$.
- Exemplo 3: $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$.
- Exemplo 4: $f(x) = 1/x$ e $g(x) = 1/x^2$.

Exemplos

Para as funções abaixo, faça um esboço de seu gráfico, determine domínio, imagem e paridade.

- Exemplo 1: $f(x) = x^3$.
- Exemplo 2: $f(x) = \sqrt{x}$.
- Exemplo 3: $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$.
- Exemplo 4: $f(x) = 1/x$ e $g(x) = 1/x^2$.
- Exemplo 5: $f(x) = \frac{1}{x} - 2$ com $D_f = (0, \infty)$.

Função Racional

Uma função racional é dada pelo quociente entre dois polinômios:

$$f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}.$$

O domínio de uma função racional são o reais, excluídos os valores x tais que $q(x) = 0$.

Função Racional

Uma função racional é dada pelo quociente entre dois polinômios:

$$f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}.$$

O domínio de uma função racional são o reais, excluídos os valores x tais que $q(x) = 0$.

- Exemplo:
  Faça um esboço do gráfico e determine o domínio e imagem da função racional

$$f(x) = \frac{x^3 - 2x^2 - x + 2}{x^2 - x - 2}.$$

Função Composta

A composição de uma função f com uma função g é uma nova função h, denotada por

$$h(x) = f(g(x)) ,$$

o que corresponde a aplicar a regra de f para a função g.

Função Composta

A composição de uma função f com uma função g é uma nova função h, denotada por

$$h(x) = f(g(x)) \ ,$$

o que corresponde a aplicar a regra de f para a função g.

- Exemplo:
  Seja $f(x) = x^2$ e $g(x) = x + 1$. Determine $f(g(x))$ e $g(f(x))$.

Definição de Função Inversa

Uma função $f(x)$ possui inversa $f^{-1}(x)$ se é injetora. Uma função é injetora se cada ponto da sua imagem é gerado por apenas um ponto do seu domínio. A função inversa, por definição, assume os pontos da imagem de f, i.e., $x \in I_f$ e retorna os pontos do domínio de f, i.e., $y \in D_f$, o que pode ser expresso por:

$$x = f(y) \; ,$$

$$f^{-1}(x) = y \, .$$

Fazendo a composição da função com sua inversa, e vice-versa, temos que:

$$f\left(f^{-1}(x)\right) = x \, ,$$

$$f^{-1}(f(x)) = x \, .$$

Função Inversa – exemplos

Para os exemplos abaixo, determine o domínio e a imagem das funções e suas inversas, quando esta existir.

- Exemplo 1.
$$f(x) = \frac{x}{2} + 1\,.$$
- Exemplo 2.
$$f(x) = \sqrt{x^2 + 1}\,.$$
- Exemplo 3.

$$f(x) = \sqrt{x^2 + 1}\,, \text{com } D_f = (-\infty, 0]\,.$$

Funções Algébricas

Uma função algébrica é construída a partir de operações algébricas com polinômios. Considere os polinômios $p(x) = x^2 - 4$ e $q(x) = x^3 - 2x$, podemos construir várias funções algébricas tomando operações deles, por exemplo:

$$f(x) = p(x)[q(x)]^2 = \left(x^3 - 2x\right)^2 \left(x^2 - 4\right) .$$

$$g(x) = [p(x) - q(x)]^{1/2} .$$

Note que todas as funções vistas até aqui são algébricas.