Pré-Cálculo – ECT2101
Slides de apoio
Funções II

Prof. Ronaldo Carlotto Batista

26 de abril de 2023

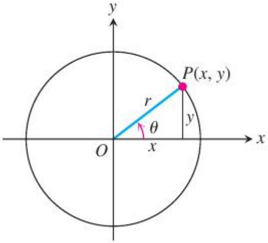
Funções Trigonométricas

As funções trigonométricas são definidas no círculo unitário:

$$\text{sen}\,(\theta) = \frac{y}{r},$$

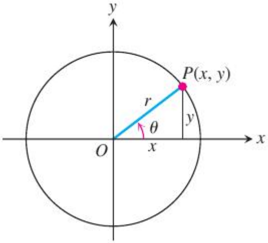
$$\cos\,(\theta) = \frac{x}{r},$$

$$\text{tg}(\theta) = \frac{\text{sen}\,(\theta)}{\cos\,(\theta)} = \frac{y}{x}$$



Funções Trigonométricas

As funções trigonométricas são definidas no círculo unitário:



$$\text{sen}\,(\theta) = \frac{y}{r}\,,$$

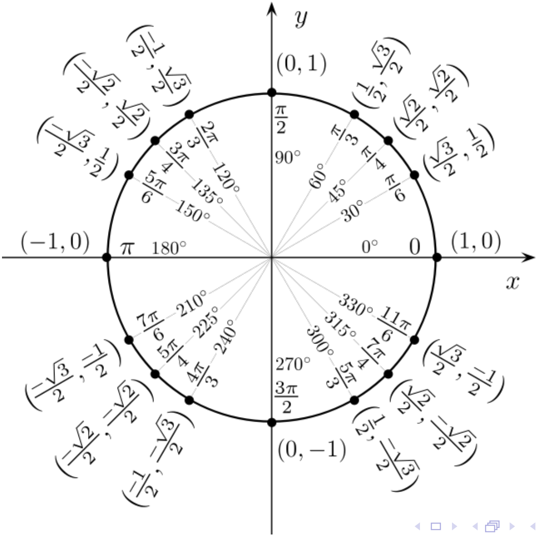
$$\cos\,(\theta) = \frac{x}{r}\,,$$

$$\text{tg}(\theta) = \frac{\text{sen}\,(\theta)}{\cos\,(\theta)} = \frac{y}{x}$$

Dada a definição das funções seno e cosseno, determine sen $(\pi/4)$ e $\cos(\pi/4)$.

Funções Trigonométricas

Coordenadas do círculo unitário:



Funções Trigonométricas

A partir das funções seno e cosseno podemos definir as funções trigonométricas recíprocas:

$$\text{cotangente: } \operatorname{cotg}(\theta) = \frac{1}{\operatorname{tg}(\theta)},$$

$$\text{secante: } \sec(\theta) = \frac{1}{\cos(\theta)},$$

$$\text{cossecante: } \operatorname{cosec}(\theta) = \frac{1}{\operatorname{sen}(\theta)}.$$

Funções Trigonométricas – Identidades

Algumas identidades importantes entre as funções trigonométricas são:

$$\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1 \tag{1}$$

$$\operatorname{sen} x = -\operatorname{sen}(-x) \ \text{(f. ímpar)}, \quad \cos x = \cos(-x) \ \text{(f. par)}, \tag{2}$$

$$\operatorname{sen}(a+b) = \operatorname{sen}(a)\cos(b) + \operatorname{sen}(b)\cos(a) \ , \tag{3}$$

$$\cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \operatorname{sen}(a)\operatorname{sen}(b) \ . \tag{4}$$

Funções Trigonométricas – Identidades

Algumas identidades importantes entre as funções trigonométricas são:

$$\text{sen}^2 x + \cos^2 x = 1 \tag{1}$$

$$\text{sen}\, x = -\text{sen}\,(-x)\ \text{(f. ímpar)}\,, \quad \cos x = \cos\,(-x)\ \text{(f. par)}\,, \tag{2}$$

$$\text{sen}\,(a+b) = \text{sen}\,(a)\cos\,(b) + \text{sen}\,(b)\cos\,(a)\ , \tag{3}$$

$$\cos\,(a+b) = \cos\,(a)\cos\,(b) - \text{sen}\,(a)\,\text{sen}\,(b)\ . \tag{4}$$

Usando as identidades (1), (2) e (3), determine quanto vale:

$$\text{sen}\left(a - \frac{\pi}{2}\right)\,, \quad \text{sen}\left(a + \frac{\pi}{2}\right)\,,$$

$$\cos\left(a - \frac{\pi}{2}\right)\,, \quad \cos\left(a + \frac{\pi}{2}\right)\,.$$

Funções Trigonométricas – Identidades

Usando as identidades (1), (3) e (4), mostre que:

$$\cos(2x) = \cos^2(x) - \operatorname{sen}^2(x) \ , \tag{5}$$

$$\operatorname{sen}(2x) = 2\operatorname{sen}(x)\cos(x) \ . \tag{6}$$

Usando essas expressões mostre que $\operatorname{sen}^2(2x) + \cos^2(2x) = 1$.

Funções Trigonométricas – Identidades

Usando as identidades (1), (3) e (4), mostre que:

$$\cos(2x) = \cos^2(x) - \operatorname{sen}^2(x) \ , \tag{5}$$

$$\operatorname{sen}(2x) = 2\operatorname{sen}(x)\cos(x) \ . \tag{6}$$

Usando essas expressões mostre que $\operatorname{sen}^2(2x) + \cos^2(2x) = 1$.
Usando as identidades (1) e (5), mostre que:

$$\cos^2(x) = \frac{1}{2} + \frac{\cos(2x)}{2} \ ,$$

$$\operatorname{sen}^2(x) = \frac{1}{2} - \frac{\cos(2x)}{2} \ .$$

Funções Trigonométricas – Transformações

Seja $f(x)$ uma função seno ou cosseno. Existem algumas transformações básicas dessas funções que podem ser expressas por:

$$f(x) = A \operatorname{sen}\left[\frac{2\pi}{B}(x - C)\right] + D,$$

onde

$\lvert A \rvert$	é a amplitude
$\lvert B \rvert$	é o período
C	dá o deslocamento horizontal
D	dá o deslocalmento vertical

Funções trigonométricas inversas

As funções trigonométricas $\operatorname{sen}(x)$ e $\cos(x)$ são periódicas, portanto não são injetoras. Contudo, podemos restringir o domínio dessas funções para que sejam injetoras.

Facto

i) sen (x) *em* $D = [-\pi/2, \pi/2]$ *é injetora.*
ii) cos (x) *em* $D = [0, \pi]$ *é injetora.*

Funções trigonométricas inversas

As funções trigonométricas $\operatorname{sen}(x)$ e $\cos(x)$ são periódicas, portanto não são injetoras. Contudo, podemos restringir o domínio dessas funções para que sejam injetoras.

Facto

i) sen (x) em $D = [-\pi/2, \pi/2]$ é injetora.
ii) cos (x) em $D = [0, \pi]$ é injetora.

- Exemplo:
  Dados esses domínios, determine o domínio e a imagem de $\operatorname{sen}^{-1}(x)$ e $\cos^{-1}(x)$.

Função Exponencial

Um exemplo básico de função exponencial aparece no cálculo do juro composto. Seja Q_0 a quantidade inicial de dinheiro aplicado a uma taxa, digamos mensal, t. O valor total num dado mês n é dado por:

$$Q_n = Q_0 \left(1 + t\right)^n .$$

Função Exponencial

Um exemplo básico de função exponencial aparece no cálculo do juro composto. Seja Q_0 a quantidade inicial de dinheiro aplicado a uma taxa, digamos mensal, t. O valor total num dado mês n é dado por:

$$Q_n = Q_0 \left(1 + t\right)^n .$$

Nesse caso os valores de n são número naturais, que indicam a quantidade de meses da aplicação. Contudo, em geral, trabalharemos com funções exponenciais cujo domínio são os números reais:

$$f\left(x\right) = k \cdot a^x ,$$

onde $a > 0$, $k \neq 0$ é uma constante real e $x \in (-\infty, \infty)$.

Função Exponencial – Exemplo

No exemplo a seguir você precisará usar uma calculadora científica e a seguinte fórmula:

$$Q_n = Q_0 \left(1 + t\right)^n .$$

- Exemplo:
  Um investidor aplica R\$ $1000,00$ na poupança, que rende, aproximadamente, uma taxa mensal de $0,6\%$ a.m. Após dois anos, quanto dinheiro há nessa aplicação? Quanto tempo de aplicação é necessário para que o valor aplicado seja duas vezes o valor inicial?

Função Exponencial

Para uma base $a > 1$, quando o expoente da função é negativo, temos uma exponencial decrescente. Isso é facilmente verificado pois:

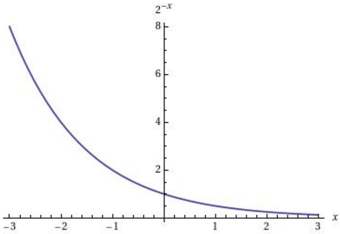
$$a^{-x} = \left(\frac{1}{a}\right)^{x}.$$

Função Exponencial

Para uma base $a > 1$, quando o expoente da função é negativo, temos uma exponencial decrescente. Isso é facilmente verificado pois:

$$a^{-x} = \left(\frac{1}{a}\right)^{x}.$$

Por exemplo, a função $f(x) = 2^{-x}$ apresenta o seguinte comportamento:



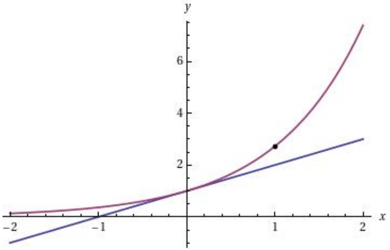
Função Exponencial – base e

- Uma função exponencial pode ter qualquer base maior que zero, no entanto, a base $e = 2,7182...$ é a mais utilizada.
- Essa base é tão utilizada que, em geral, ao dizer "função exponecial" assume-se que a base é e.
- O número irracional e é chamado número de Euler.
- Notações:

$$f(x) = e^x \text{ ou } f(x) = \exp(x) .$$

Função Exponencial – base e

A função $f(x) = e^x$ tem a propriedade especial de ter o coeficiente angular de sua reta tangente (derivada) igual à 1 em $x = 0$. No gráfico abaixo mostramos as funções $y_1 = e^x$ e sua reta tangente em $x = 0$, que é a função $y_2 = 1 + x$.



Função Logarítmica

A função logarítimica pode ser definida como a função inversa da exponencial. Se $f(x) = a^x$, com $a > 0$ e $a \neq 1$, então

$$f^{-1}(x) \equiv \log_a x \, .$$

Da definição da função inversa temos:

$$\log_a a^x = x \quad \text{e} \quad a^{\log_a x} = x \, .$$

O logarítimo de um número x é o número y que resolve a seguinte equação:

$$\log_a x = y \mid a^y = x \, .$$

Propriedades do Logarítimo

A função logarítimica tem algumas propriedades básicas:

$$\ln(ab) = \ln a + \ln b$$

$$\ln(a/b) = \ln a - \ln b$$

$$\ln(x^r) = r \ln x$$

Mudança de base da exponencial

Dada uma exponencial numa base a, usando a função logarítmica, podemos convertê-la para uma função exponencial numa base mais apropriada para fins de cálculo, em geral na base e. Sabemos que

$$y = e^{\ln y} ,$$

identificando $y = a^x$, temos

$$a^x = e^{\ln a^x} = e^{x.\ln a} .$$

Mudança de base do logarítmo

De forma semelhante, podemos converter a base de um logarítimo para outra que seja mais apropriada para uma determinada finalidade.

$$\log_a x = \log_a \left(b^{\log_b x} \right) = \log_b x \log_a b\,.$$

$$\log_b x = \frac{\log_a x}{\log_a b}\,.$$

Números Complexos

Um número complexo z é dado por

$$z = a + ib\,,$$

onde $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$ e $i^2 = -1$.
Dois complexos $z = a + ib$ e $w = c + id$ são iguais se e somente se:

$$a = c \text{ e } b = d\,.$$

Números Complexos - Operações

Sejam dois complexos $z = a + ib$ e $w = c + id$, vamos definir as seguintes operações:

$$\text{Soma: } z + w = (a + c) + i\,(b + d)$$

$$\text{Subtração: } z - w = (a - c) + i\,(b - d)$$

$$\text{Produto: } z \cdot w = (ac - bd) + i\,(ad + bc)$$

$$\text{Conjugado: } \bar{z} = a - ib$$

$$\text{Quociente: } \frac{z}{w} = \frac{z}{w} \cdot \frac{\bar{w}}{\bar{w}}$$

$$\text{Módulo:} |z| = \sqrt{z \cdot \bar{z}}$$

Números Complexos - Potências de i

Note que há uma recorrência dos valores de i^n

$$i^0 = 1$$

$$i^1 = i$$

$$i^2 = -1$$

$$i^3 = -i$$

$$i^4 = 1$$

$$i^5 = i$$

Números Complexos - Raízes

Vamos estudar a raíz quadrada de reais negativos. Seja $a \geq 0$, então:

$$\sqrt{-a} = \sqrt{-1}\sqrt{a} = i\sqrt{a}.$$

Note também que $\left(-i\sqrt{a}\right)^2 = -a$, portanto

$$\sqrt{-a} = \pm i\sqrt{a}.$$

Atenção, para dois reais positivos a e b:

$$\sqrt{(-a)(-b)} \neq \sqrt{(-a)}\sqrt{(-b)}.$$

Por exemplo,

$$\sqrt{16} = \sqrt{4}\sqrt{4} = 2 \cdot 2 = 4,$$

mas

$$\sqrt{16} = \sqrt{(-4)(-4)} \neq \sqrt{(-4)}\sqrt{(-4)} = (2i)(2i) = -4.$$

Números Complexos - Forma Polar

Podemos identificar um número complexo $z = a + ib$ no plano cartesino como um ponto $P(a, b)$. A partir de uma contrução geométrica, também podemos expressar esse número na forma:

$$z = r(\cos(\theta) + i\text{sen}(\theta)),$$

onde $r = |z|$ e $0 \leq \theta < 2\pi$ é o ângulo entre o vetor $\vec{OP}$ e o eixo x.

Multiplição na forma polar: sejam dois complexos $z_1 = r_1(\cos(a) + i\text{sen}(a))$ e $z_2 = r_2(\cos(b) + i\text{sen}(b))$, a multiplicação entre eles pode ser expressa como

$$z_1 z_2 = r_1 r_2(\cos(a + b) + i\text{sen}(a + b)).$$

- Ex.1
  Sejam $z_1 = 2(\cos(\pi/12) + i\text{sen}(\pi/12))$ e $z_2 = 3(\cos(\pi/4) + i\text{sen}(\pi/4))$, usando a fórmula polar, determine $z_1 z_2$.

Números Complexos - Fórmula de Moivre

Por indução, podemos mostrar que para um número $z = r\left(\cos\left(\theta\right) + i\mathrm{sen}\left(\theta\right)\right)$ sua n-éssima potência, com $n \in \mathbb{N}$, é dada por:

$$z^n = r^n\left(\cos\left(n\theta\right) + i\mathrm{sen}\left(n\theta\right)\right).$$

Note que o argumento θ deve estar no intervalo $[0, 2\pi)$.

Números Complexos - Fórmula de Moivre

Por indução, podemos mostrar que para um número $z = r(\cos(\theta) + i\text{sen}(\theta))$ sua n-éssima potência, com $n \in \mathbb{N}$, é dada por:

$$z^n = r^n(\cos(n\theta) + i\text{sen}(n\theta)).$$

Note que o argumento θ deve estar no intervalo $[0, 2\pi)$.

- Ex.2
  Determine i^n com $n \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$ usando a fórmula polar.

Números Complexos - Fórmula de Moivre

Por indução, podemos mostrar que para um número $z = r\left(\cos\left(\theta\right) + i\mathrm{sen}\left(\theta\right)\right)$ sua n-éssima potência, com $n \in \mathbb{N}$, é dada por:

$$z^n = r^n\left(\cos\left(n\theta\right) + i\mathrm{sen}\left(n\theta\right)\right).$$

Note que o argumento θ deve estar no intervalo $[0, 2\pi)$.

- Ex.2
  Determine i^n com $n \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$ usando a fórmula polar.

- Ex.3
  Usando a fórmula polar, determine $(z)^8$, onde $z = -1 - i$.

Números Complexos - Radiciação

Usando a fórmula de Moivre, podemos expressar n-éssima raíz de um complexo na forma:

$$z^{\frac{1}{n}} = r^{\frac{1}{n}} \left(\cos\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n} \right) + i \mathrm{sen} \left(\frac{\theta + 2k\pi}{n} \right) \right),$$

onde $k = 0, 1, 2 \ldots (n-1)$.

Números Complexos - Radiciação

Usando a fórmula de Moivre, podemos expressar n-éssima raíz de um complexo na forma:

$$z^{\frac{1}{n}} = r^{\frac{1}{n}} \left(\cos\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right) + i\text{sen}\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right)\right),$$

onde $k = 0, 1, 2 \ldots (n-1)$.

- Ex.1
  Seja $z = 4 + 4i\sqrt{3}$, determine $\sqrt{z}$.

Números Complexos - Radiciação

Usando a fórmula de Moivre, podemos expressar n-éssima raíz de um complexo na forma:

$$z^{\frac{1}{n}} = r^{\frac{1}{n}} \left(\cos\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n} \right) + i\text{sen}\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n} \right) \right),$$

onde $k = 0, 1, 2 \ldots (n-1)$.

- Ex.1
  Seja $z = 4 + 4i\sqrt{3}$, determine $\sqrt{z}$.
- Ex.2
  Determine $\sqrt[6]{1}$.