

Probabilidades, função exponencial e gráficos

Objetivos:

- 1) Trabalhar noções de probabilidade.
- 2) Rever as propriedades básicas da função exponencial.
- 3) Trabalhar o uso de planilhas e a construção de gráficos.
- 4) Introduzir o procedimento de ajuste de um modelo teórico aos dados experimentais.
- 5) Simular o efeito exponencial do decaimento radioativo.

Atividades

1. Noções de probabilidade

Sobre a bancada há um conjunto com cerca de 150 dados de 6 faces. Qual é a probabilidade de, em um determinado lançamento com um dado, sair a face 6 voltada para cima? E de sair a face 1?

Jogue um único dado 6 vezes, anotando para cada arremesso a face obtida. Aconteceu o que você esperava?

Agora lance os 150 dados de uma vez sobre a bandeja e conte quantas vezes cada face apareceu virada para cima. Anote esses valores em uma planilha, usando uma coluna para representar o número da face, e a outra para representar a quantidade correspondente. Represente os dados na forma de um gráfico de colunas.

2. Valor esperado

O valor esperado de um certa variável x , que assume valores x_i com probabilidades $P(x_i)$, é dado por

$$E(x) = \sum_i x_i \cdot P(x_i)$$

Determine o valor esperado da média do valor das faces dos dados e compare com o valor obtido para o lançamento realizado para 150 dados.

3. Simulação do decaimento radiativo

Um fenômeno natural bastante interessante é o decaimento radioativo, no qual um elemento radioativo decai em outro elemento, emitindo radiação no processo. Os átomos desse elemento vão se “desintegrando” à medida que o tempo passa: inicialmente, com bastantes átomos, muitos decaem, mas à medida que o tempo passa, o número de átomos originais diminui, o que diminui também o número de decaimentos. Nesse tipo de fenômeno é possível se determinar a “meia-vida” do decaimento, ou seja, o tempo em que o número de átomos leva para cair pela metade.

Vamos simular o decaimento radiativo com arremessos de dados. Cada dado representa um átomo radioativo.

Jogue, após chacoalhar bem, 150 dados e verifique quantos saíram com determinada face voltada para cima (por exemplo, a face 6). Conte e retire esses dados do conjunto e, após chacoalhar bem os restantes, jogue os dados novamente. Mais uma vez, conte e retire os dados que saíram com a face escolhida voltada para cima. Repita o procedimento 12 vezes.

Faça uma tabela para apresentar o número de dados que foram sobrando em função do número do arremesso. O que a tabela ilustra? O que você pode perceber? Visualmente, qual foi o “tempo” (número de jogadas) de meia-vida? Basta verificar de quantas em quantas jogadas o número de dados vai caindo pela metade.

4. Gráfico e ajuste de curva

Em uma nova aba da planilha, crie duas colunas, uma para o número do lançamento e outra para os dados remanescentes, começando com 0 e 150. Faça o gráfico selecionando as duas colunas com o número do lançamento no eixo x e o número dos dados remanescentes no eixo y.

Função exponencial

Uma função exponencial é uma função do tipo:

$$f(t) = f_0 \cdot B^{-\alpha t}$$

A quantidade B é chamada de base. Note que $f_0 = f(0)$. A função exponencial mais usada nas aplicações é aquela em que a base é o número de Euler, ou seja, $B = e = 2,718281828459...$

Nas aplicações, os parâmetros da função terão um significado prático. No caso da contagem da quantidade de átomos radioativos, $f_0 = N_0$ é o número inicial de átomos e α é o chamado fator do decaimento radiativo (ou taxa de decaimento). A variável t é o tempo. Em nossa simulação com dados, o tempo será o número da rodada de lançamentos (rodada 1, 2, 3, ..., 12).

Vamos mostrar agora que a função que relaciona a expectativa do número de dados restantes e o número t de rodadas segue uma função exponencial. Acompanhe a dedução feita pelo professor.

Modelagem matemática do experimento

Fizemos um gráfico da quantidade de dados remanescentes em função do número de rodadas. Agora, vamos ver se nossa análise teórica modela bem o experimento que fizemos.

Na edição das propriedades do gráfico, entre na aba “Personalizar” e na sub-aba “Séries”. Procure pela opção “Linha de tendência” e a selecione. Escolha o tipo “Exponencial”. Veja que um gráfico de uma função exponencial é sobreposto aos dados do gráfico. Coloque o marcador “Usar equação” para ver os detalhes da função.

Em algum lugar da planilha, anote o valor do parâmetro N_0 e do parâmetro alfa (α) fornecidos pelo ajuste teórico. Você considera que o modelo teórico captura corretamente o comportamento dos dados experimentais?

Em caso afirmativo, podemos usar o modelo teórico para fazer previsões experimentais. Por exemplo, podemos prever em que rodada a quantidade restante de dados será igual a 4.

Extras

- Obtenha a meia-vida teórica desse decaimento exponencial.
- Qual é a probabilidade, de, em dois arremessos consecutivos com um dado, você obter duas faces iguais?
- Cada elemento radioativo tem um tempo de meia-vida próprio. Pesquise, em casa, o tempo de meia-vida do urânio 235 e do plutônio 239. O lixo nuclear representa um perigo? Por quanto tempo ele teria que ficar armazenado, em lugares selados, por questão de segurança?

Habilidades do Projeto Pedagógico do Curso trabalhadas:

hx.x Calcular a probabilidade de eventos aleatórios, expressando-a por um número racional (forma fracionária, decimal e percentual).

hx.x Comparar a probabilidade obtida por meio de experimentos sucessivos.

h2.5 Reconhecer as curvas das funções básicas: reta, parábola, exponencial crescente e decrescente, seno, cosseno, hipérbole, raiz quadrada, gaussiana, logaritmo.

h2.5 Reconhecer as curvas das funções básicas: reta, parábola, exponencial crescente e decrescente, seno, cosseno, hipérbole, raiz quadrada, gaussiana, logaritmo.

h2.6 Compreender os termos coeficiente linear, coeficiente angular, concavidade, período, amplitude, amplitude pico a pico, amplitude rms, taxa de decaimento, meia vida e reconhecer esses parâmetros nos gráficos.

h2.7 Reconhecer os diferentes crescimentos das funções: logaritmo, da raiz quadrada, linear, polinomial e exponencial.

h2.8 Construir gráficos em planilhas no computador a partir de uma tabela de dados, reconhecendo o melhor tipo de gráfico e observando aspectos estéticos.

hb4.11 Adaptar a solução de um problema a outro parecido, mas com diferenças mais fundamentais do que os valores numéricos dos dados diferentes.

hb8.7 Fazer interpolações de dados e saber prever informações a partir da extrapolação de dados.