ÂNGULOS E SUAS TRANSFORMAÇÕES

MATERIAL PRODUZIDO PELA MONITORIA DA DISCIPLINA DE MODELAGEM DO MUNDO FÍSICO I DA ECT/UFRN.
(05/2024)

1) O QUE É O ÂNGULO?

O ângulo é uma região delimitada por duas semirretas que possuem um vértice (origem) em comum. Para medi-lo, há duas unidades: grau ou radiano.

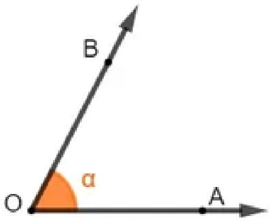


Figura 1 - Ângulo α delimitado pelas semirretas OA E OB. Fonte: Brasil Escola

2) O ÂNGULO E A CIRCUNFERÊNCIA

Uma circunferência é uma figura geométrica formada pela união de pontos que possuem a mesma distância de um ponto fixo, chamado de centro. Entre dois pontos de uma circunferência podemos definir o arco de circunferência.

Ao lado, exibimos vários comprimentos de arco com o mesmo ângulo em comum.

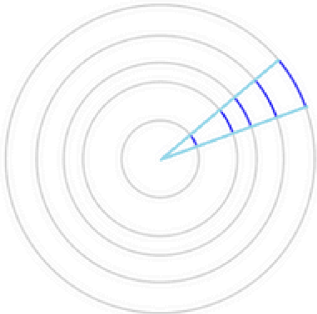


Figura 2 - Arcos com diferentes comprimentos

Note que o ângulo é o mesmo para os diferentes comprimentos de arco pois as semirretas que definem o ângulo são iguais para todos os arcos formados.

3) O RADIANO

O radiano pode ser entendido como uma unidade natural de ângulo. Por definição, o ângulo em radianos é a razão entre o comprimento de arco (Δs) e o raio do círculo (R):

$$\theta = \frac{\Delta s}{R} .$$

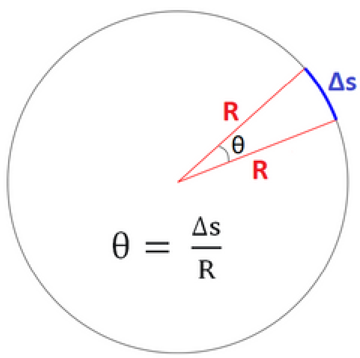


Figura 3 - Definição do radiano

Portanto, conforme a relação estabelecida, 1 radiano corresponde à abertura em que os comprimentos do arco e do raio são iguais.

Pergunta: Você sabe qual é o ângulo em radianos que corresponde a toda a circunferência?
Voltaremos a ela daqui a pouco.

4) O GRAU

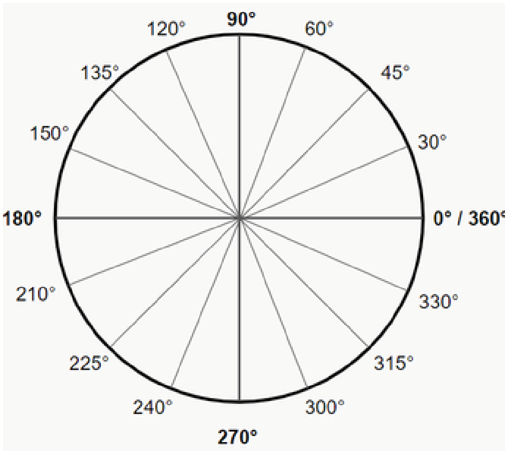


Figura 4 - Definição do grau
Fonte: Matreemática

O grau divide uma circunferência em 360 partes iguais. Assim, toda circunferência tem 360º.

5) TRANSFORMAÇÃO DE MEDIDAS DE ÂNGULOS

O número π (pi) é a divisão entre o comprimento da circunferência (C) pelo seu diâmetro (D). Sabemos que o diâmetro é o dobro do raio (R). Assim, manipulando de forma simples a equação a seguir:

$$\pi = \frac{C}{D} = \frac{C}{2R},$$

obtemos que:

$$C = 2\pi R.$$

Portanto, uma circunferência de raio R possui comprimento igual a 2πR e o ângulo Θ de uma volta completa é 360º. Isso significa que a medida em radianos de 360º é dada por:

$$\Theta = \frac{\Delta s}{R} = \frac{2\pi R}{R} = 2\pi \text{ rad}.$$

Agora podemos voltar a pergunta feita anteriormente. O ângulo em radianos que corresponde a toda a circunferência é 2π rad, o que equivale a aproximadamente 6,28 radianos. Sabendo dessa relação, agora podemos transformar qualquer ângulo de graus em radianos e vice-versa a partir de uma simples regra de três. Porém, para simplificar nossos cálculos, vamos dividir a circunferência pela metade. Assim, obteremos um ângulo de 180° equivalente a π rad.

grau (°)	rad
180	π
a	b

Por exemplo, se tivermos um ângulo (a) em graus e quisermos seu correspondente (b) em radianos, basta multiplicar o ângulo pelo fator de conversão π rad/180°.

$$a * \pi \text{ rad} = 180^{\circ} * b$$

$$b = a * \frac{\pi}{180^{\circ}}.$$

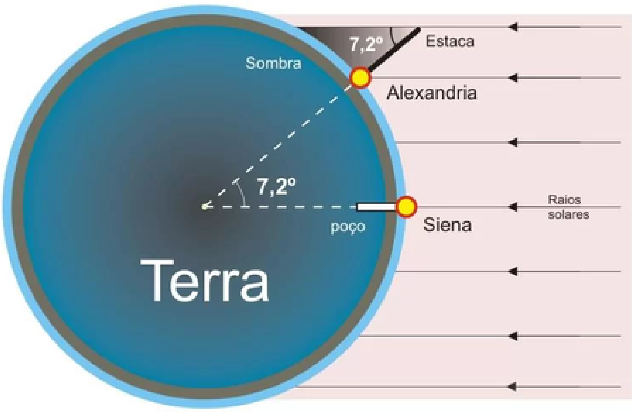
Porém, se tivermos um ângulo (b) em radianos e quisermos seu correspondente (a) em graus, basta multiplicar o ângulo pelo fator de conversão 180°/π rad.

$$a * \pi \text{ rad} = 180^{\circ} * b$$

$$a = b * \frac{180^{\circ}}{\pi}.$$

Como foi estimada a medida do raio da Terra?

Uma estaca de madeira e um sol radiante foram o suficiente para o matemático grego Eratóstenes estimar o tamanho do raio da Terra pela primeira vez em 240 a.C. Na cidade de Siena, os objetos não produziam sombra no solstício de Verão (o dia mais longo do ano). Mas em Alexandria, onde Eratóstones vivia, e que ficava a 785 quilômetros a norte de Siena e sobre o mesmo meridiano, esse fenômeno não acontecia. Foi a partir daí que os matemáticos começaram a desconfiar de que a Terra não seria plana.



Ele utilizou uma estaca para estimar a angulação dos raios solares sobre a cidade de Alexandria. O matemático mediu o tamanho da estaca e o da sombra que era produzida por ela e, utilizando trigonometria básica, constatou que o ângulo dos raios era aproximadamente 7,2°.

A distância entre as cidades de Siena e Alexandria era conhecida (cerca de 785 km) e o ângulo encontrado de 7,2° da estaca era o mesmo ângulo de abertura entre essas duas cidades devido a igualdade de ângulos alternos internos à retas paralelas (ver figura). Assim, fazendo uma simples regra de três, Eratóstones conseguiu encontrar o comprimento da circunferência da Terra:

$$\frac{7{,}2°}{360°} = \frac{785}{x} \Rightarrow \begin{aligned} 7{,}2° * x \text{ km} &= 360° * 785 \text{ km} \\ x &= \frac{360° * 785\text{km}}{7{,}2°} \\ x &= 39250 \text{ km} \end{aligned}$$

Através desse cálculo foi encontrado que o perímetro total da Terra é de 39.250 quilômetros. Então, para descobrir o raio da Terra, Eratóstones isolou o raio da equação do comprimento da circunferência ($C = 2\pi r$). E, finalmente, o raio estimado do planeta pelo matemático foi de 6247 km. Hoje, sabemos que há um erro de 2% em relação as estimativas atuais, mas é impressionante notar a sagacidade de Eratóstones mesmo tendo poucas tecnologias de medições disponíveis em sua época.

Referências Bibliográficas:

AZEVEDO, Levi OA et al. Revisitando o Experimento de Eratóstenes: medida do raio de Terra. Revista Brasileira de Ensino de Física, v. 44, p. e20210354, 2021.

NUSSENZVEIG, Herch Moysés. Curso de física básica: Mecânica (vol. 1). Editora Blucher, 2013.

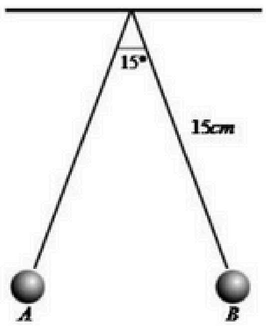
EXERCÍCIOS

1) Realize as transformações de medidas de ângulos pedidas:
a) 120° em radianos;
b) 2π/7 em graus;
c) 234° em radianos;
d) 3π/5 em graus.

2) (Fuvest – SP) Quantos graus mede aproximadamente um ângulo de 0,105 radianos?

3) (Unifor – CE) Reduzindo-se ao primeiro quadrante um arco de medida 7344°, obtém-se um arco, cuja medida, em radianos, é:

4) O pêndulo oscila entre as posições A e B . Calcule o comprimento do arco descrito por ele no deslocamento de A para B:



5) Uma praça circular tem raio de 40 m. Quantas metros anda uma pessoa quando dá 3 voltas na praça?

GABARITO

1) a)2π/3 rad
b) 51,43°
c) 13π/10 rad
d) 108°

2) 6,02°
3) π/5
4) 3,93 cm
5) 753,98 m