Estimando a constante PI (π) usando uma planilha eletrônica

MATERIAL PRODUZIDO PELA MONITORIA DA DISCIPLINA DE MODELAGEM DO MUNDO FÍSICO I (ECT/UFRN)

(05/2024)

1. <u>Introdução</u>

O número pi, com seu valor aproximado de 3,14159265358979..., é um elemento fundamental em diversas áreas, presente em nosso cotidiano e em várias fórmulas matemáticas. Sempre que pensamos em pi, logo nos vem à mente a circunferência. Mas como o pi está relacionado com a circunferência?

Considerando uma circunferência com diâmetro D, vamos utilizar um barbante para contorná-la completamente. Em seguida, marcamos o ponto onde o fio se encontra no plano, conforme ilustrado nas figuras abaixo.

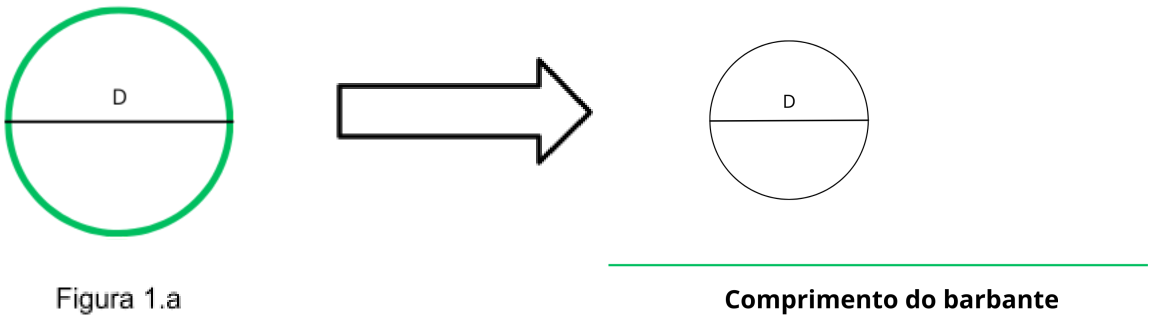

Figura 1.a

Figura 1.b

Se colocarmos cópias dessa circunferência em sequência, como mostra a figura 2, é possível associar o comprimento do barbante, que é igual ao comprimento da circunferência, com o seu diâmetro da seguinte forma:

$$C = xD . \qquad (1)$$

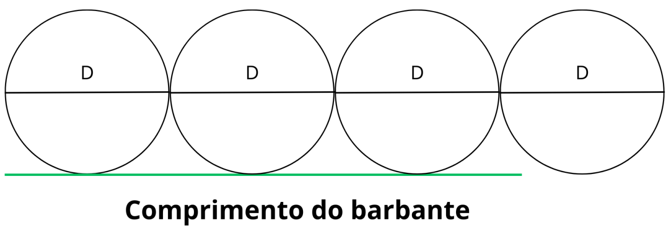

Figura 2

Note que o comprimento C assume valores entre 3D < C < 4D. Assim, foi definido o conhecido número pi (π), que é uma constante de proporcionalidade definida a partir da equação 1:

$$C = \pi D. \tag{2}$$

$$\pi = \frac{C}{D}. \tag{3}$$

Assim, define-se o número π como a razão do comprimento da circunferência pelo seu diâmetro. Logo, não importa o tamanho da circunferência, o valor de pi sempre será o mesmo. Existem diversas formas de estimar pi. Nesse texto, será abordado uma estimativa utilizando polígonos regulares e uma planilha eletrônica.

2. Estimativa do número pi

2.1. Método Utilizando Polígonos

Arquimedes utilizou um método geométrico para encontrar essas estimativas para π. Ele inscreveu e circunscreveu polígonos regulares de 96 lados em uma circunferência e comparou os perímetros desses polígonos com os das circunferências. Quanto mais lados o polígono tinha, mais próximo seu perímetro estava da circunferência, permitindo a ele calcular π com maior precisão.

Arquimedes encontrou que π estava entre 223/71 e 22/7. Isso significa que ele estabeleceu um intervalo no qual π estava contido. O valor 223/71 é aproximadamente 3,1408 e o valor 22/7 é aproximadamente 3,1429. Portanto, Arquimedes determinou que π estava entre esses dois valores, o que representou uma significativa aproximação para o valor real de π na época. Essa realização foi um marco importante no desenvolvimento do cálculo de π e na matemática em geral, demonstrando a habilidade de Arquimedes em utilizar métodos geométricos avançados para resolver problemas matemáticos complexos.

Na nossa estimativa, iremos usar apenas o polígono circunscrito à circunferência. Como esse polígono é circunscrito, o valor do seu perímetro será um pouco maior do que o da circunferência. Portanto, a ideia é aumentar o número de lados desse polígono para que a figura se assemelhe cada vez mais com a circunferência (Fig. 3), assim possibilitando o perímetro do polígono ser uma boa aproximação para o comprimento da circunferência, assim podemos usar a equação 3.

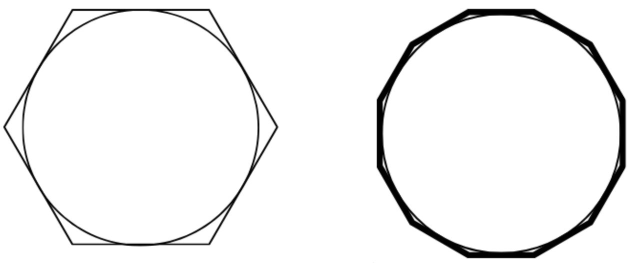

Figura 3

Se observarmos o hexágono circunscrito a uma circunferência com raio R, podemos perceber que ele pode ser dividido em 6 triângulos (Fig. 4). Cada lado do hexágono é a base de um desses triângulos, e os vértices desses triângulos são os pontos onde os lados do hexágono se encontram. A figura 5 mostra a imagem de um dos triângulos.

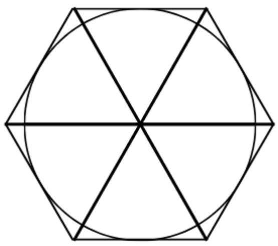

Figura 4

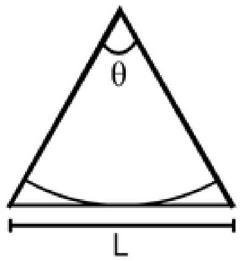

Figura 5

Note que podemos adicionar uma reta que corta o triângulo ao meio, a qual será o raio da circunferência inscrita ao hexágono. Isso nos ajudará a determinar o comprimento do lado do polígono regular que estamos utilizando para a estimativa do perímetro.

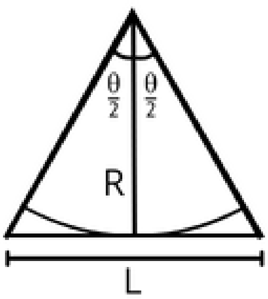

Figura 6.a

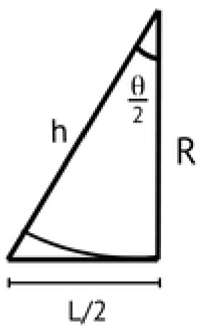

Figura 6.b

Portanto, usando trigonometria no triângulo da figura 6.b, temos que:

$$tan(\frac{\theta}{2}) = \frac{\frac{L}{2}}{R}. \qquad (4)$$

E isolando o L da equação 4, temos:

$$L \;=\; 2R\,tan(\frac{\theta}{2})\,. \qquad (5)$$

Note que θ pode ser expresso em função dos lados do polígono:

$$\theta \;=\; \frac{360}{n}\,, \qquad (6)$$

onde n é o número de lados do polígono. Usando que 2R = D na eq. (5), onde D é o diâmetro da circunferência, obtemos:

$$L \;=\; D\,tan(\frac{180}{n}). \qquad (7)$$

Assim sendo possível calcular o perímetro do polígono:

$$P \;=\; n\,L\,. \qquad (8)$$

Substituindo o L pela equação 7, temos:

$$P \;=\; n\,D\,tan(\frac{180}{n}). \qquad (8.1)$$

Para determinar PI, vamos usar que o perímetro do polígono é uma aproximação para o comprimento da circunferência e, portanto, utilizando a equação 3, teremos;

$$\pi \;=\; \frac{P}{D}\,. \qquad (9)$$

Substituindo o P pela equação 8.1, temos:

$$\pi \;=\; n\,tan(\frac{180}{n}). \qquad (9.1)$$

Assim, obtemos uma fórmula para estimar o valor de pi. É importante notar que, ao substituirmos o perímetro (P) na equação 9 pela equação 8.1, o diâmetro se cancela na expressão. Isso mostra que a estimativa para π depende apenas do número de lados do polígono circunscrito.

2.2 Determinando o valor de PI com o google planilhas

No exemplo inicial, em que o polígono circunscrito possuía n=6 lados, obtemos uma estimativa aproximada de π (usando a eq. 9.1) como 3,4641016151377... Esta estimativa não é muito precisa devido ao número limitado de lados do polígono. Nesta seção, usando o Google Planilhas, podemos aumentar o valor de n, o que permitirá a visualização da aproximação do valor real de pi. Para isso, Abra uma planilha em branco no Google Planilhas e crie duas colunas: uma representando o valor de n e outra a determinação de pi através da eq. (9.1) (ver Fig. 8).

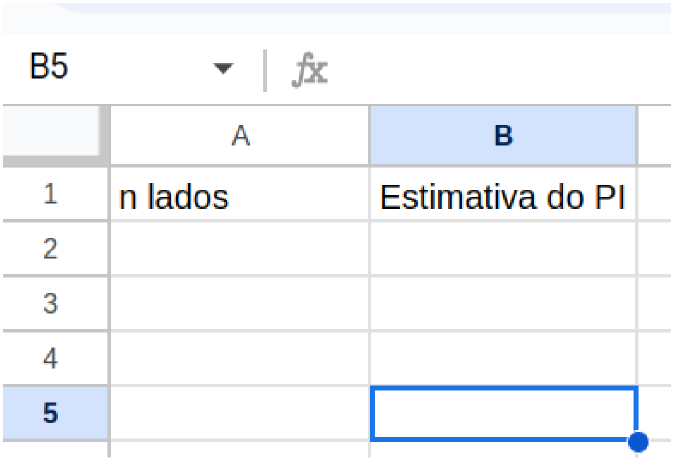

Figura 8

Na célula A2, insira o número inicial de n. Na célula B2, utilize a equação 9.1, onde n será a célula A2. Inicie a fórmula com "=", No Excel, a tangente é representada pela função "TAN()", cujo argumento é em radianos. Portanto, o valor 180 graus na equação 9.1 deve ser transformado em radianos, e para isso utilize a função "RADIANOS()", que realiza essa conversão automaticamente. Dessa forma, na célula B2 teremos "= A2 * TAN(RADIANOS(180)/A2)".

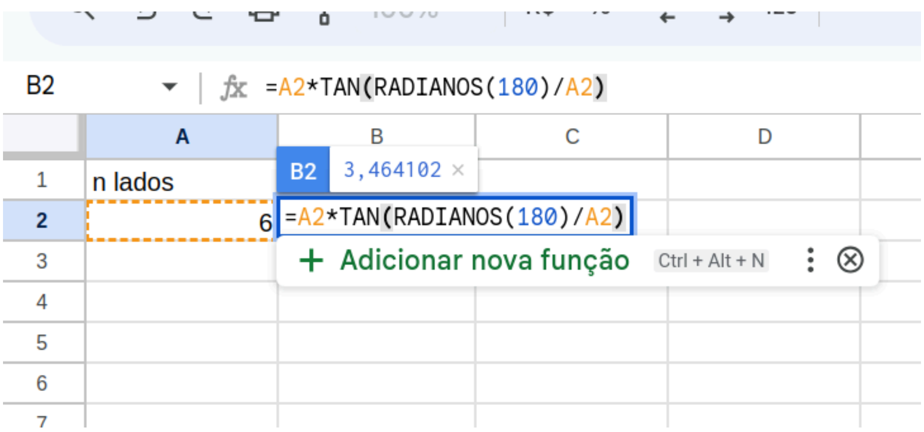

Figura 9

Na célula A3, incrementamos o valor da célula anterior, que é a A2. Portanto, na A3 ficará, por exemplo, "= A2 + 2".. Após isso, utilizaremos o preenchimento automático até um valor conveniente. Em seguida, faremos o mesmo preenchimento automático para a coluna da estimativa de π (Fig 10).

n	Estimativa PI
6	3,464102
8	3,313708
10	3,249197
12	3,215390
14	3,195409
16	3,182598
18	3,173886
20	3,167689
22	3,163122
24	3,159660
26	3,156972
28	3,154842
30	3,153127
32	3,151725
34	3,150564
36	3,149592

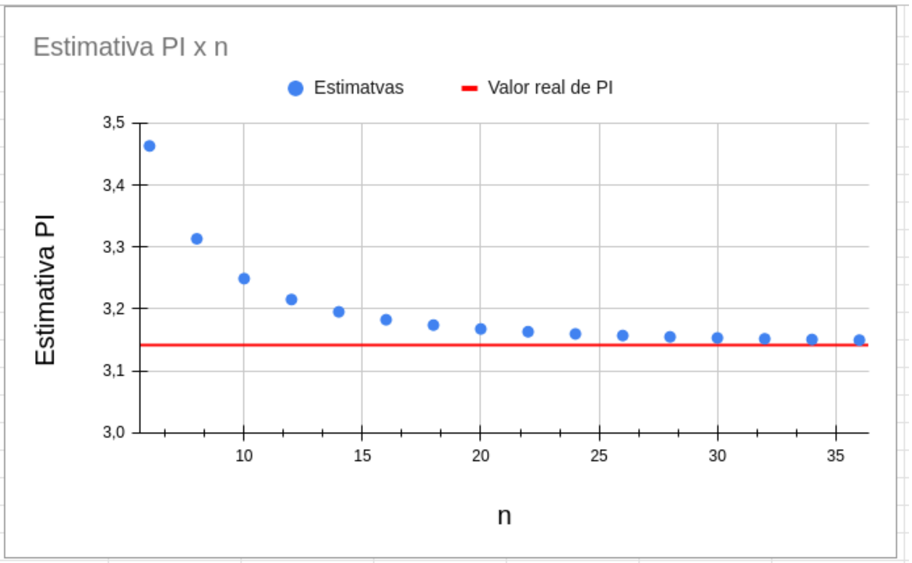

Figura 10

Como mostrado na Figura 10, ao fazer n=36, obtemos uma estimativa de pi como 3,149592..., o que significa que alcançamos a precisão de 2 casas decimais do número pi. Isso demonstra que, à medida que aumentamos o valor de n, nos aproximamos do valor real de pi. Essa convergência para o valor real de pi à medida que aumentamos o valor de n é um exemplo do conceito de infinito na matemática.

<u>2.3 Desafio</u>

Imagine que você foi encarregado de projetar um silo para armazenar a colheita de grãos de feijão em uma fazenda. O silo tem a forma de um cilindro com 20 metros de altura e 10 metros de diâmetro. Para calcular o volume desse silo, a constante π será utilizada com uma precisão de 8 casas decimais. Utilize a planilha da seção anterior para determinar π com 8 casas e determine o volume do cilindro. Compare o resultado obtido com o volume usando π com apenas 3 casas decimais.

3. <u>Pi na calculadora e Google Planilhas</u>

No Google planilhas, existe uma função cujo objetivo é simplesmente fornecer o valor de π**.** Em uma célula, escreva “=PI( )”, conforme a figura abaixo.

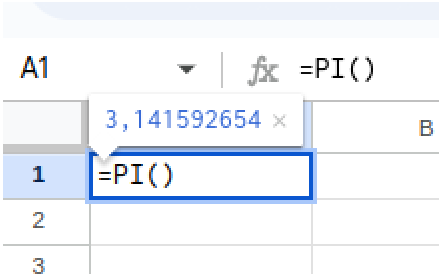

Figura 11

Já na calculadora, o símbolo Pi (π) está disponível como uma função ou como um valor pré-definido.

- **Tecla dedicada:** Muitas calculadoras têm uma tecla específica para o Pi, marcada com o símbolo "π" ou "Pi". Ao pressionar essa tecla, o valor de Pi será inserido diretamente em sua expressão.

Em algumas calculadoras científicas, o símbolo Pi (π) pode estar disponível como uma função secundária, exigindo que você pressione uma tecla de modificação, como "Shift", antes de acessar o Pi. Aqui está como você pode encontrar o Pi nessas calculadoras:

- **Pressione a tecla de modificação:** Primeiro, pressione a tecla de modificação necessária (por exemplo, "Shift").
- **Pressione a tecla Pi:** Em seguida, pressione a tecla que possui o símbolo Pi (geralmente é uma tecla com "π" ou "Pi" impresso nela).

Referências

"Pi" (2024) Disponível em: https://pt.wikipedia.org/wiki/Pi [Acesso em: 30/04/2024].