Notas de aula - Espaço Tempo

Prof. Ronaldo Carlotto Batista

25 de abril de 2019

1 Revisão da Mecânica Newtoniana

Quantidade elementares:

- posição: $\vec{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$
- velocidade: $\vec{v} = \frac{d}{dt}\vec{r}$
- momento linear de partícula com massa m: $\vec{p} = m\vec{v}$
- aceleração: $\vec{a} = \frac{d^2}{dt^2}\vec{r} = \frac{d}{dt}\vec{v}$

Leis de Newton:

1. Quando$\sum \vec{F} = \vec{0}$, $\vec{a} = 0$ (define referencial inercial, Referenciais de Galileu)
2. $\vec{F} = \frac{d}{dt}\vec{p}$ (equação de movimento em referencial inercial)
3. $\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$ (ação e reação)

No caso de uma partícula com massa constante: $\vec{F} = m\vec{a}$.

Transformação de Galileu: relaciona coordenadas entre referenciais inerciais S e S', que se move com velocidade $\vec{V} = V\hat{x}$ em relação a S. Se as origens dos sistemas coincidem em $t = 0$, temos:

$$\begin{aligned} t &= t' \\ x &= x' + Vt' \\ y &= y' \\ z &= z' \end{aligned}$$

Adição de velocidades:

$$v_x = \frac{dx}{dt} = \frac{dx'}{dt'} + V \Rightarrow v_x = v'_x + V\,,$$

as velocidades nas direções y e z são idênticas.

Admitindo que a massa e a força é invariante sob TGs, a Segunda Lei de Newton é covariante frente às TGs, em S :

$$\vec{F} = m\vec{a}$$

e em S'

$$\vec{F} = m\vec{a}'$$

pois

$$\vec{a} = \frac{d}{dt}\left(v'_x + V, v'_y, v'_z\right) = \left(a'_x, a'_y, a'_z\right) = \vec{a}'$$

2 Velocidade da luz

Alguns experimentos relevantes para a determinação da velocidade da luz:

1676	Romer, observação de saltélites de Júpter: $c = 2,14300 \times 10^8 \mathrm{m/s}$
1725	James Bradely, observação da aberração da luz estelar: $c = 3,1 \times 10^8 \mathrm{m/s}$
1849	Fizeau: $c = (315300 \pm 500)\,\mathrm{km/s}$
1862	Foucault: $c = (298000 \pm 500)\,\mathrm{km/s}$
1927	Michelson $c = (299796 \pm 4)\,\mathrm{km/s}$
1950	Louis Essen, cavidades ressonantes: $c = (299792,5 \pm 1)\,\mathrm{km/s}$

Atualmente, a velocidade da luz no vácuo é definida por

$$c = 2,99792458 \times 10^8 \mathrm{m/s}$$

e o metro dado pela distância que a luz viaja numa fração de 1/299.792.458 do segundo, que por sua vez é definido como 9.192.631.770 períodos da radiação emitida na transição hiperfina entre dois estados do Césio 133.

A natureza da luz é explicada pelas equações de Maxwell, com as quais pode-se mostrar que no vácuo, o campo elétrico (e anolgamente o magnético) satisfaz a equação de onda

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\vec{E} - c^2\nabla^2\vec{E} = 0\,, \tag{1}$$

onde

$$c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}}\,. \tag{2}$$

Numa versão simplificada da equação de onda para uma função escalar $\psi\,(t, x)$ vejamos o que ocorre ao realizarmos uma TG:

$$S:\quad \frac{\partial^2}{\partial t^2}\psi - c^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}\psi = 0\,, \tag{3}$$

$$S' : \quad \frac{\partial^2}{\partial t'^2}\psi - 2V\frac{\partial^2}{\partial t' \partial x'}\psi - \left(c^2 - V^2\right)\frac{\partial^2}{\partial x'^2}\psi = 0 \tag{4}$$

Isso mostra que a equação de onda para luz não é invariante por uma TG. Isso é esperado para ondas materiais, como perturbações no ar ou água, nas quais os fluidos estejam em movimento em relação ao observador. Admitindo que a TG seja válida para o eletromagnetismo, deveria haver um meio de propagação para luz, que foi chamado de éter.

Em 1897, o experimento de interferometria de Michelson e Morley não detectou sinais de movimento da Terra em relação ao éter. Tal resultado indidca que não existe éter, portanto não há razão para haver diferenças na velocidade da luz entre referenciais inerciais.

3 Relatividade de Einstein

A teoria da Relatividade de Einstein é contruída com base em dois postulados:

1. Postulado da Relatividade: as leis físicas e resultados de experimentos devem ser independentes do movimento de translação uniforme entre sistemas de referência (referenciais inerciais).

2. Postulado da Velocidade da Luz: a velocidade da luz no vácuo é a mesma para todos referenciais inerciais.

Assim, admitido que o eletromagnestismo de Maxwell esteja correto, devemos encontrar outra transformação que ligue referenciais inerciais mantendo a constância da velocidade da luz.

3.1 Transformação de Lorentz

Devemos contruir tranformações entre referenciais tais que a velocidade da luz seja invariante. Assim, um frente de onda esférica num referencial deve permanecer esférica em outro, isto é,

$$S : \quad x^2 + y^2 + z^2 = c^2 t^2 \tag{5}$$

$$S' : \quad x'^2 + y'^2 + z'^2 = c^2 t'^2 \tag{6}$$

A tranformação que faz isso chama-se Tranformação de Lorentz (TL):

$$\begin{array}{rcc} t' & = & \left(t - Vx/c^2\right)/\sqrt{1 - V^2/c^2} \\ x' & = & \left(x - Vt\right)/\sqrt{1 - V^2/c^2} \\ y' & = & y \\ z' & = & z \end{array}$$

Definindo

$$\beta = \frac{V}{c}$$

e

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}\,,$$

temos

$$\begin{aligned} t' &= \gamma\,(t - \beta x/c) \\ x' &= \gamma\,(x - \beta ct) \\ y' &= y \\ z' &= z \end{aligned}$$

Podemos também expressar a coordenada temporal como uma nova dimensão do espaço, tomando

$$x^0 = ct \;\;,\; x^1 = x \;\;,\; x^2 = y \;\;,\; x^3 = z\,,$$

temos

$$\begin{aligned} x'^0 &= \gamma\,(x^0 - \beta x^1) \\ x'^1 &= \gamma\,(x^1 - \beta x^0) \\ x'^2 &= x^2 \\ x'^3 &= x^3 \end{aligned} \tag{7}$$

Note a simetria presente nessa forma.

A forma apresentada sugere que a TL pode ser expressa como uma mudança de sistema de coordenadas, de fato podemos escrever:

$$\begin{pmatrix} x'^0 \\ x'^1 \\ x'^2 \\ x'^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix}\,,$$

o que pode ser expresso de forma mais compacta:

$$x'^\mu = \Lambda^\mu_\nu x^\nu\,, \tag{8}$$

onde utilizamos a convenção de soma de Einstein, que estabelece que indices repetidos são somados, por exemplo:

$$x'^0 = \Lambda^0_\nu x^\nu = \Lambda^0_0 x^0 + \Lambda^0_1 x^1 + \Lambda^0_2 x^2 + \Lambda^0_3 x^3\,, \tag{9}$$

segundo a matriz da TL, temos:

$$x'^0 = \gamma x^0 - \gamma\beta x^1 + 0\left(x^2\right) + 0\left(x^3\right)\,. \tag{10}$$

A transformação inversa pode ser deduzida invertendo a matriz Λ^μ_ν, ou simplesmente resolvendo para as coordenadas x^μ na Eq. (7), temos então

$$\begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & \beta\gamma & 0 & 0 \\ \beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x'^0 \\ x'^1 \\ x'^2 \\ x'^3 \end{pmatrix}\,. \tag{11}$$

Assim, vemos que a TL é uma transformação de coordenadas num espaço de quatro dimensões, o qual é conhecido como espaço de Minkowski.

3.2 Espaço Euclidiano e de Minkowski

No EE, vale o Teorema de Pitágoras, com o qual podemos determinar distâncias num espaço de duas dimensões. Nesse contexto, podemos definir a distância, Δs, entre dois pontos num EE de três dimensões como

$$\Delta s^2 = \Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2 \,. \tag{12}$$

Queremos generalizar a ideia de distância para espaços não euclidianos, mas que localmente possam ser considerados como euclidianos. Para isso temos que definir um diferencial de distância. Considerando pontos $A\,(x, y, z)$ e $B\,(x + dx, y + dy, z + dz)$, definimos o diferencial de distância ds no EE pela equação:

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 \,. \tag{13}$$

Reescrevendo em termo das coordenadas indexadas, temos

$$ds^2 = \left(dx^1\right)^2 + \left(dx^2\right)^2 + \left(dx^3\right)^2 \,, \tag{14}$$

ou ainda

$$ds^2 = \delta_{ij} dx^i dx^j \,, \tag{15}$$

onde é a matriz diagonal

$$\delta_{ij} = \text{diag}\,(1, 1, 1) \;.$$

O espaço no qual atuam as TL deve incluir o tempo, vamos considerar a seguinte escolha

$$ds^2 = \left(dx^0\right)^2 - \left(dx^1\right)^2 - \left(dx^2\right)^2 - \left(dx^3\right)^2 \;. \tag{16}$$

Aplicando uma TL aos diferenciais temos:

$$\begin{array}{rcl} dx^0 & = & \gamma\,(dx'^0 + \beta dx'^1) \\ dx^1 & = & \gamma\,(dx'^1 + \beta dx'^0) \\ dx^2 & = & dx'^2 \\ dx^3 & = & dx'^3 \end{array} \,,$$

Então

$$ds^2 = \left(dx^0\right)^2 - \left(dx^1\right)^2 - \left(dx^2\right)^2 - \left(dx^3\right)^2 \,,$$

$$ds^2 = \gamma^2 \left(\left(dx'^0\right)^2 + \beta dx'^0 dx'^1 + \beta^2 \left(dx'^1\right)^2\right) - \gamma^2 \left(\left(dx'^1\right)^2 + \beta dx'^0 dx'^1 + \beta^2 \left(dx'^0\right)^2\right) - \left(dx'^2\right)^2 - \left(dx'^3\right)^2 \,,$$

$$ds^2 = \gamma^2 \left(1 - \beta^2\right) \left[\left(dx'^0\right)^2 - \left(dx'^1\right)^2\right] - \left(dx'^2\right)^2 - \left(dx'^3\right)^2 \,,$$

$$ds^2 = \left(dx'^0\right)^2 - \left(dx'^1\right)^2 - \left(dx'^2\right)^2 - \left(dx'^3\right)^2 = ds'^2 \,.$$

Note que, com a definição (16), o diferencial de distância do espaço é invariante pela TL.

Definimos o Espaço de Minkowski como espaço com seguinte a estrutura métrica (diferencial de distância):

$$ds^2 = \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \,, \tag{17}$$

onde

$$\eta_{\mu\nu} = \mathrm{diag}\,(1, -1, -1, -1) \tag{18}$$

é chamada métrica de Minkowski (o nome preciso seria tensor métrico).

No EM, a posição de uma partícula é um quadri-vetor $X^\mu = (x^0, x^1, x^2, x^3)$, que corresponde a um certo tempo x^0 numa certa posição $\vec{x} = (x^1, x^2, x^3)$. Outra representação possível seria $X^\mu = (x^0, \vec{x})$.

3.3 Intervalos

No EM há três tipos de intervalos possíveis (aqui assumimos apenas variações de x^0 e x^1):

1. Tipo luz (propagação de um fóton): $dx^1 = cdt = dx^0 \Rightarrow ds^2 = 0$,

2. Tipo tempo (propagação de partícula massiva com velocidade $v < c$): $dx^1 = vdt \Rightarrow ds^2 = (1 - \beta^2)$,

3. Tipo espaço (pontos do espaço tempo que não pode ser conectador causalmente) $dx^1 > cdt \Rightarrow ds^2 < 0$.

3.4 Tempo próprio

Vimos que no EM ds^2 é invariante por TLs. Isso nos permite definir uma medida de tempo invariante, chamada de tempo próprio:

$$d\tau = \frac{1}{c}\sqrt{ds^2}\,.$$

Para uma partícula com massa, sempre temos $ds^2 \geq 0$.

3.5 Quadri-vetores

Como vimos, a toda partícula no EM corresponte um quadri-vetor posição X^μ. Podemos generalizar os conceitos de velocidade, momento e aceleração usando derivadas de quadrivetores em relação ao tempo próprio.

Antes de prosseguir vamos definir o produto escalar dos quadri-vetores. Sejam $A^\mu = (A^0, A^1, A^2, A^3)$ e $B^\mu = (B^0, B^1, B^2, B^3)$, o produto escalar entre eles é dado por

$$A \cdot B = g_{\mu\nu} A^\mu B^\nu \,, \tag{19}$$

onde $g_{\mu\nu}$ é a métrica do espaço. Também podemos representar

$$g_{\mu\nu} A^\mu = A_\nu$$

e

$$A \cdot B = A_\nu B^\nu \,.$$

Dizemos que vetores com índices superiores, A^μ, são contravariantes e vetores com índice inferiores, A_μ, são ditos covariantes. A razão desta distinção é devida às propriedades desses vetores frente à transformações de coordenadas, o que não abordaremos aqui.

No EE temos a relação usual

$$A \cdot B = \delta_{ij} A^i B^j = A^1 B^1 + A^2 B^2 + A^3 B^3 \,.$$

Já no EM temos

$$A \cdot B = \eta_{\mu\nu} A^\mu B^\nu = A^0 B^0 - A^1 B^1 - A B^2 - A^3 B^3 \,.$$

3.5.1 Quadri-velocidade

Vamos definir a quadri-velocidade como

$$U^\mu = \frac{dX^\mu}{d\tau} = \left(\frac{dx^0}{d\tau}, \frac{x^1}{d\tau}, \frac{x^2}{d\tau}, \frac{x^3}{d\tau} \right) \,.$$

Podemos reescrever o tempo próprio na forma:

$$d\tau = dt \sqrt{\left(1 - \frac{(dx^1)^2}{c^2 dt^2} - \frac{(dx^2)^2}{c^2 dt^2} - \frac{(dx^3)^2}{c^2 dt^2} \right)}$$

$$d\tau = dt \sqrt{(1 - \beta^2)} = \frac{dt}{\gamma}$$

$$U^\mu = \gamma \left(c, \vec{v} \right)$$

Sendo U^μ um quadri-vetor, ele se transforma segundo a TL, mas podemos construir a partir dele uma quantidade invariante:

$$U \cdot U = U^\mu U_\mu \,,$$

onde

$$U_\mu = \eta_{\mu\nu} U^\nu = \gamma \left(c, -\vec{v} \right) \,,$$

então

$$U^\mu U_\mu = \gamma^2 \left(c^2 - v^2 \right) = c^2 \gamma^2 \left(1 - \beta^2 \right)$$

$$U^\mu U_\mu = c^2 \,.$$

3.5.2 Quadri-momento

Já definimos a quadri-velocidade, que é usada para definir o quadri-momento de uma partícula:

$$P^\mu = m_0 U^\mu = (\gamma m_0 c, \gamma m_0 \vec{v}) \ ,$$

onde m_0 é a massa da partícula em seu referencial de repouso. P^μ também é um vetor que se transforma segundo a TL e tem o módulo invariante:

$$P^\mu P_\mu = m_0^2 c^2 \,.$$

3.5.3 Força

Agora queremos determinar a força no referencial do laboratório, num tempo t. Usando a parte espacial do quadri-momento, temos

$$\vec{F} = \frac{d}{dt}\left(\gamma m_0 \vec{v}\right) \ . \tag{20}$$

Esta é força relativistica que devemos usar para resolver problemas dinâmicos.

3.5.4 Energia cinética relativística

Na mecânica não relativistica, $F = ma$, e identificamos a energia cinética como

$$K = W = \int_0^{x'} madx = \int_0^{x'} mdv\frac{dx}{dt} = \int_0^{v'} mvdv = \frac{1}{2}mv'^2 \,.$$

Na mecânica relativística temos

$$W = \int_0^{x'} \frac{d}{dt}\left(\frac{m_0 v}{\sqrt{1-v^2/c^2}}\right)dx = \int_0^{t'} \frac{d}{dt}\left(\frac{m_0 v}{\sqrt{1-v^2/c^2}}\right)vdt.$$

Vamos resolver a primitiva

$$\int \frac{d}{dt}\left(\frac{m_0 v}{\sqrt{1-v^2/c^2}}\right)vdt = \int \left[\frac{m_0 v}{\sqrt{1-v^2/c^2}}\frac{dv}{dt} + \frac{m_0 v^3/c^2}{(1-v^2/c^2)^{3/2}}\frac{dv}{dt}\right]dt$$

$$\int \left[\frac{m_0 v dv/dt}{(1-v^2/c^2)^{3/2}}\right]dt = \int \frac{d}{dt}\left(\frac{m_0 c^2}{(1-v^2/c^2)^{1/2}}\right)dt = \int d\left(\frac{m_0 c^2}{(1-v^2/c^2)^{1/2}}\right) = \frac{m_0 c^2}{(1-v^2/c^2)^{1/2}}$$

Tomando os limites entre $v = 0$ e v, temos:

$$W = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}} - m_0 c^2$$

Onde identificamos a energia de repouso

$$E_0 = m_0 c^2$$

e a energia cinética

$$K = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$