

Lista I - Cosmologia

Prof. Ronaldo

March 24, 2015

Esta lista deverá ser entregue até 15:30h do dia 10/4/15.

1. Considere o seguinte elemento de linha tridimensional:

$$ds^2 = \frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2 (d\theta^2 + \sin^2(\theta) d\varphi^2),$$

onde $k = 0, \pm 1$. Determine o volume de uma esfera de raio R para cada possível valor de k .

2. Para o elemento de linha anterior, proceda com uma troca de coordenadas a fim de expressá-lo na forma isotrópica:

$$ds^2 = \frac{\delta_{ij} dx^i dx^j}{(1 + k\delta_{ij} x^i x^j / 4)^2}.$$

3. Considerando a seguinte forma da métrica FRW,

$$ds^2 = dt^2 - \frac{a^2(t) \delta_{ij} dx^i dx^j}{(1 + k\delta_{ij} x^i x^j / 4)^2}$$

determine todas componentes não nulas da conexão $\Gamma_{\mu\nu}^\alpha$ e do tensor de Einstein G_ν^μ . Assumindo que o espaço é preenchido por um fluido perfeito, cujo tensor energia-momento é $T_\nu^\mu = (\rho + p) U^\mu U_\nu - p\delta_\nu^\mu$, com $U^\mu = (1, 0, 0, 0)$, determine também as equações de Einstein e depois coloque-as na forma das equações de Friedman. Determine também as equações de conservação $\nabla_\mu T_\nu^\mu = 0$.

4. Para o caso com $k = 0$, determine a evolução do fator de escala $a = a(t)$ e densidade de energia $\rho = \rho(t)$ para fluidos com equação de estado $p = \omega\rho$, onde $1 \geq \omega \geq -1$ e constante.
5. Suponha que observações astrofísicas determinem $H_0 = 70 \text{ km}/(\text{sMpc})$. Determine a idade do universo para os seguintes modelos

- (a) Universo plano, dominado por radiação, $\Omega^0 = \Omega_r^0 = 1$.
- (b) Universo plano, dominado por matéria (EdS), $\Omega^0 = \Omega_m^0 = 1$.
- (c) Universo aberto, com poeira (OCDM), com $\Omega^0 = \Omega_m^0 = 0, 3$.
- (d) Universo plano, com fluido efetivo $p = \omega\rho$. Nesse caso, determine ω tal que $t_0 = 13,8 \text{ Gy}$.

6. Para $z = 1, 10, 1000$, determine a diferença percentual de d_L e d_A nos modelos ΛCDM e OCDM, ambos com $\Omega_m^0 = 0, 3$.

7. Para pequenas distâncias cosmológicas, podemos expandir o fator de escala na forma

$$a(t) = a_0 \left[1 + H_0 (t - t_0) - \frac{1}{2} q_0 H_0^2 (t - t_0)^2 + \dots \right],$$

onde q_0 é parâmetro de desaceleração. Para os modelos Λ CDM e OCDM, determine q_0 em função de Ω_m^0 e estude seu sinal. Expresse $(t - t_0)$ em função de z , mostre que a distância luminosa pode ser aproximada por

$$d_L \simeq H_0^{-1} \left[z + \frac{1}{2} (1 - q_0) z^2 + \dots \right]$$

e interprete o primeiro termo no contexto da Lei de Hubble e do efeito Doppler.