Cálculo 2 – ECT1212

Integrais Múltiplas

Prof. Ronaldo Carlotto Batista

23 de outubro de 2014

Cálculo de áreas e Soma de Riemann

Vamos primeiro revisar os conceitos da integral de uma função de uma variável.
Podemos estimar a área sob uma curva definida por uma função $f = f(x)$ não negativa e contínua em $[a, b]$ pela Soma de Riemann:

$$S_n = f(c_1)\,\Delta x_1 + f(c_2)\,\Delta x_2 + \ldots + f(c_n)\,\Delta x_n = \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\,\Delta x_i\,,$$

onde $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$, com $\{x_0, x_1, \ldots, x_n\} \in [a, b]$ e $x_0 = a$ e $x_n = b$, e $c_i \in [x_{i-1}, x_i]$.

Cálculo de áreas e Soma de Riemann

Vamos primeiro revisar os conceitos da integral de uma função de uma variável.
Podemos estimar a área sob uma curva definida por uma função $f = f(x)$ não negativa e contínua em $[a, b]$ pela Soma de Riemann:

$$S_n = f(c_1)\,\Delta x_1 + f(c_2)\,\Delta x_2 + \ldots + f(c_n)\,\Delta x_n = \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\,\Delta x_i\,,$$

onde $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$, com $\{x_0, x_1, \ldots, x_n\} \in [a, b]$ e $x_0 = a$ e $x_n = b$, e $c_i \in [x_{i-1}, x_i]$.
Se expressarmos os Δx_i como uma função decrescente de n, no limite $n \to \infty$ a Soma de Riemann tende à area desejada:

$$A = \lim_{n\to\infty} S_n\,.$$

Cálculo de áreas e Soma de Riemann

Vamos primeiro revisar os conceitos da integral de uma função de uma variável.
Podemos estimar a área sob uma curva definida por uma função $f = f(x)$ não negativa e contínua em $[a, b]$ pela Soma de Riemann:

$$S_n = f(c_1)\Delta x_1 + f(c_2)\Delta x_2 + \ldots + f(c_n)\Delta x_n = \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i \, ,$$

onde $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$, com $\{x_0, x_1, \ldots, x_n\} \in [a, b]$ e $x_0 = a$ e $x_n = b$, e $c_i \in [x_{i-1}, x_i]$.
Se expressarmos os Δx_i como uma função decrescente de n, no limite $n \to \infty$ a Soma de Riemann tende à area desejada:

$$A = \lim_{n\to\infty} S_n \, .$$

Para ver animações deste processo veja o artigo sobre a Integral de Riemann na Wikipedia LINK

Integral Definida

Seja $f = f(x)$ uma função contínua em $[a, b]$, sua Integral Definida (Integral de Riemann) entre a e b é dada por:

$$\int_a^b f(x)\, dx = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\, \Delta x_i\,.$$

Se tal limite existe, diz-se que f é integrável em $[a, b]$. Esta definição é mais geral que para o cálculo de áreas e f não precisa ser positiva em $[a, b]$, mas, caso seja, sua integral entre a e b pode ser interpretada como a área sob a curva definida por f.

Integral Dupla

A ideia geométrica básica de uma integral dupla é computar um volume limitato por uma região e uma função função $f = f(x, y)$. Vamos primeiramente definir uma região de interesse dada por um retângulo:

$$R = \{(x, y) \,|a \leq x \leq b \text{ e } c \leq y \leq d\} \ .$$

Tomemos as seguintes partições para x e y:

$$P_x = \{x_0, x_1, ..., x_n\} \in [a, b]$$

e

$$P_y = \{y_0, y_1, ..., y_m\} \in [c, d] \ .$$

Definindo $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ e $\Delta y_i = y_i - y_{i-1}$ a área do retângulo R é particionada em mn retângulos dados por:

$$R_{ij} = \Delta x_i \Delta y_j \ .$$

Integral Dupla

Definindo $\bar{x}_i \in [x_i - x_{i-1}]$ e $\bar{y}_j \in [y_j - y_{j-1}]$ a quantidade

$$f(\bar{x}_i, \bar{y}_i)\, \Delta x_i \Delta y_j$$

representa o volume de um paralelepípedo de base retangular R_{ij} e altura $f(\bar{x}_i, \bar{y}_i)$. Então a soma de todos estes volumes será uma estimativa para o volume da figura limitada por $f(x, y)$ e a região R:

$$V \simeq \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} f(\bar{x}_i, \bar{y}_i)\, \Delta x_i \Delta y_j \,.$$

Esta é a soma de Riemann de f relativa à partição de R.

Integral Dupla

Sendo Δ o maior entre todos Δx_i e todos Δy_j, quando o limite

$$\lim_{\Delta \to 0} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} f\left(\bar{x}_i, \bar{y}_i\right) \Delta x_i \Delta y_j$$

existe e é único é denominado de integral dupla (segundo Riemann) da função f sobre a região R:

$$\iint_R f(x, y)\, dydx = \lim_{\Delta \to 0} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} f\left(\bar{x}_i, \bar{y}_i\right) \Delta y_j \Delta x_i \,.$$

Neste caso dizemos que f é integrável em R.

Integral Dupla - Teorema de Fubini

Se $f = f(x, y)$ é integrável na região retangular $R = \{(x, y) \,|\, a \leq x \leq b \text{ e } c \leq y \leq d\}$,então:

$$\iint_R f(x, y)\, dA = \int_a^b \int_c^d f(x, y)\, dydx = \int_c^d \int_a^b f(x, y)\, dxdy$$

Integral Dupla

Para calcular integrais duplas com o uso de primitivas, é interessante fazer a seguinte visualização:

$$\int_a^b \int_c^d f(x,y)\,dydx = \int_a^b g(x)\,dx\,,$$

onde

$$g(x) = \int_c^d f(x,y)\,dy$$

é a integral definida de $f(x,y)$ em relação a y entre $y = c$ e $y = d$.

Integral Dupla - Exemplos

- Exemplo 1:
  Usando a integral dupla, encontre o volume determinado pelo retângulo $R = \{(x, y)\,|0 \leq x \leq a \text{ e } 0 \leq y \leq b\}$ e a função $f(x, y) = c$.

Integral Dupla - Exemplos

- Exemplo 1:
  Usando a integral dupla, encontre o volume determinado pelo retângulo $R = \{(x, y) \,|0 \leq x \leq a \text{ e } 0 \leq y \leq b\}$ e a função $f(x, y) = c$.

- Exemplo 2:
  Usando a integral dupla, encontre o volume determinado pelo retângulo $R = \{(x, y) \,|0 \leq x \leq 2 \text{ e } 0 \leq y \leq 1\}$ e o plano $z = 4 - x - y$.

Regiões não retangulares

- Exemplo 1:
  Encontre o volume determinado pela função $f(x,y) = xy$ e a região $B = \{(x,y)\,|0 \leq x \leq 1 \text{ e } 0 \leq y \leq x^2\}$.

Podemos expressar tal problema como uma integração no retângulo $R = \{(x,y)\,|0 \leq x \leq 1 \text{ e } 0 \leq y \leq 1\}$ da seguinte função:

$$F(x,y) = \begin{cases} xy\,, & (x,y) \in B \\ 0\,, & (x,y) \notin B \end{cases}$$

Com isso precisamos determinar a seguinte integral:

$$\iint_B f(x,y)\,dxdy = \iint_R F(x,y)\,dxdy\,.$$

Regiões não retangulares

- Exemplo 1:
  Encontre o volume determinado pela função $f(x,y) = xy$ e a região $B = \{(x,y) \, | 0 \leq x \leq 1 \text{ e } 0 \leq y \leq x^2\}$.

Podemos expressar tal problema como uma integração no retângulo $R = \{(x,y) \, | 0 \leq x \leq 1 \text{ e } 0 \leq y \leq 1\}$ da seguinte função:

$$F(x,y) = \begin{cases} xy \, , & (x,y) \in B \\ 0 \, , & (x,y) \notin B \end{cases}$$

Com isso precisamos determinar a seguinte integral:

$$\iint_B f(x,y) \, dxdy = \iint_R F(x,y) \, dxdy \, .$$

Que pode ser expressa na forma:

$$\iint_R F(x,y) \, dxdy = \int_0^1 \int_0^{x^2} xydydx \, .$$

Regiões não retangulares

Também é possível inverter a ordem de integração, neste caso a integral é dada por:

$$\iint_R F(x,y)\,dxdy = \int_0^1 \int_{\sqrt{y}}^1 xydxdy\,.$$

Regiões não retangulares

Também é possível inverter a ordem de integração, neste caso a integral é dada por:

$$\iint_R F(x,y)\,dxdy = \int_0^1 \int_{\sqrt{y}}^1 xydxdy\,.$$

- Exemplo 2:
  Determine a integral

  $$\iint_R \frac{\operatorname{sen}(x)}{x} dA\,,$$

  onde R é a região no plano xy delimitada pela reta $y = x$, o eixo x e pela reta $x = 1$.

Regiões não retangulares

- Exemplo 3:
  Determine a integral
  $$\iint_R \frac{\operatorname{sen}(x)}{x}\, dA\,,$$
  onde R é a região no plano xy delimitada pelas funções $f(x) = 2x$ e $g(x) = x^2$.

- Exemplo 3:
  Determine a integral

$$\iint_R \frac{\operatorname{sen}(x)}{x}\, dA\,,$$

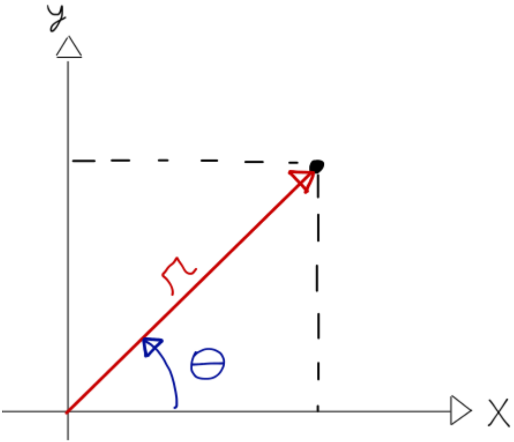
  onde R é a região no plano xy delimitada pelas funções $f(x) = 2x$ e $g(x) = x^2$.

- Exemplo 4:
  Usando a integral dupla, determine a área da região R do exemplo anterior.

Coordenadas Polares

Coordenadas Polares

No sistema de coordenadas polar, um ponto é representado por uma coordenada radial, r, e outra ângular, θ.
Graficamente temos a seguinte representação:



Coordenadas Polares

Geometricamente é fácil determinar a lei de transformação de coordenadas:

$$\begin{aligned} x &= r\cos\theta \,, \\ y &= r\text{sen}\theta \,. \end{aligned}$$

Em geral estamos interessados em leis de transformações de um-a-um, neste caso as novas coordenadas têm a seguinte variação:

$$r \geq 0 \,,$$

$$0 \leq \theta < 2\pi \,.$$

Mudança de variáveis em integrais duplas

Queremos agora expressar uma integral dupla em coordenadas cartesianas em outro sistema de coordenadas, como o polar por exemplo. Para um caso geral, com novas coordenadas u e v,

$$\begin{aligned} x &= X(u,v) \\ y &= Y(u,v) \end{aligned} \quad \text{com inversa} \quad \begin{aligned} u &= U(x,y) \ , \\ v &= V(x,y) \ . \end{aligned}$$

tal mudança é dada por

$$\iint_R f(x,y)\, dxdy = \iint_B f(u,v)\, |J(u,v)|\, dudv \ .$$

Mudança de variáveis em integrais duplas

Na expressão anterior, B é a região equivalente a R delimitada pelas novas coordenas u e v, e

$$J(u,v) = \det \begin{pmatrix} \partial X/\partial u & \partial Y/\partial u \\ \partial X/\partial v & \partial Y/\partial v \end{pmatrix}$$

é o jacobiano da transformação.

Mudança de variáveis em integrais duplas

Na expressão anterior, B é a região equivalente a R delimitada pelas novas coordenas u e v, e

$$J(u,v) = \det \begin{pmatrix} \partial X/\partial u & \partial Y/\partial u \\ \partial X/\partial v & \partial Y/\partial v \end{pmatrix}$$

é o jacobiano da transformação.

- Ex. 1:
  Determine a expressão geral de uma integral dupla em um novo sistema de coordenadas (u,v) no qual atuou uma transformação linear.

Mudança de variáveis em integrais duplas

- Ex. 2:
  Usando coord. cartesianas, determine a área da região delimitada por $x^2 + y^2 \leq a^2$ com $x \geq 0$. Refaça a conta utilizando coord. polares.

Mudança de variáveis em integrais duplas

- Ex. 2:
  Usando coord. cartesianas, determine a área da região delimitada por $x^2 + y^2 \leq a^2$ com $x \geq 0$. Refaça a conta utilizando coord. polares.
- Ex. 3:
  Na mesma região do exemplo anterior, determine a seguinte integral em coord. polares

$$\iint_R (x - y)\, dxdy \,.$$

Mudança de variáveis em integrais duplas

- Ex. 2:
  Usando coord. cartesianas, determine a área da região delimitada por $x^2 + y^2 \leq a^2$ com $x \geq 0$. Refaça a conta utilizando coord. polares.
- Ex. 3:
  Na mesma região do exemplo anterior, determine a seguinte integral em coord. polares
  $$\iint_R (x - y)\, dxdy\,.$$
- Ex. 4:
  Usando coordenadas polares, determine o valor da integral
  $$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\, dx\,.$$

Integrais Triplas

- Ex. 1:
  Determine o volume da região B delimitata por
  $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq x$ e $0 \leq z \leq x + y$.

- Ex. 1:
  Determine o volume da região B delimitata por
  $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq x$ e $0 \leq z \leq x + y$.

- Ex. 2:
  No mesmo volume, B, do exemplo anterior, determine a integral
  $$\iiint_B x dx dy dz .$$

Integrais Triplas

- Ex. 1:
  Determine o volume da região B delimitata por
  $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq x$ e $0 \leq z \leq x + y$.

- Ex. 2:
  No mesmo volume, B, do exemplo anterior, determine a integral
  $$\iiint_B x dx dy dz \,.$$

- Ex. 3:
  Determine o volume delimitado pelas superfícies
  $f(x, y) = x^2 + 3y^2$ e $g(x, y) = 8 - x^2 - y^2$.

Integrais Triplas - Massa e Centro de Massa

Um objeto com densidade $\rho = \rho(x, y, z)$, de volume V, tem sua massa total dada pela integral tripla:

$$M = \iiint_V \rho dxdydz\,.$$

As coordenadas de seu centro de massa são dadas por:

$$x_c = \frac{\iiint_V x\rho dxdydz}{M}\,,$$

$$y_c = \frac{\iiint_V y\rho dxdydz}{M}\,,$$

$$z_c = \frac{\iiint_V z\rho dxdydz}{M}\,.$$

- Ex. 1:
  Determine as coordenadas de centro de massa de um cubo de aresta a com densidade $\rho = \rho_0\,(1 + x/a)$.

Coordenadas Cilíndricas

A lei de transformação de coordenadas cartesianas $P(x, y, z) \rightarrow P(r, \theta, z)$ para coordenadas cilíndricas é:

$$\begin{aligned} x &= r\cos\theta\,, \\ y &= r\mathrm{sen}\theta\,, \\ z &= z \quad . \end{aligned}$$

Com isso podemos calcular o jacobiano da transformação e o elemento diferencial de volume em coordenadas cilíndricas:

$$dxdydz = rdrd\theta dz$$

Coordenadas Cilíndricas

- Ex. 1:
  Usando a integral tripla em coordenadas cilíndricas, determine o volume de um cilíndro de raio a e altura h.

Coordenadas Cilíndricas

- Ex. 1:
  Usando a integral tripla em coordenadas cilíndricas, determine o volume de um cilíndro de raio a e altura h.

- Ex. 2:
  Encontre o volume da região delimitada pelo disco $x^2 + (y-1)^2 \leq 1$ e pelo parabolóide $z = x^2 + y^2$.

Coordenadas Esféricas

A lei de transformação de coordenadas cartesianas $P\left(x,y,z\right)\to P\left(r,\theta,\varphi\right)$ para coordenadas esféricas é:

$$\begin{aligned} x &= r\cos\theta\,\mathrm{sen}\varphi\,, \\ y &= r\,\mathrm{sen}\theta\,\mathrm{sen}\varphi\,, \\ z &= r\cos\varphi\,. \end{aligned}$$

Coordenadas Esféricas

A lei de transformação de coordenadas cartesianas $P(x, y, z) \to P(r, \theta, \varphi)$ para coordenadas esféricas é:

$$\begin{aligned} x &= r\cos\theta\,\mathrm{sen}\varphi\,, \\ y &= r\,\mathrm{sen}\theta\,\mathrm{sen}\varphi\,, \\ z &= r\cos\varphi\qquad . \end{aligned}$$

Com esta nomenclatura, $r = |\vec{r}| = |\vec{OP}|$ é o raio; θ é o ângulo azimutal, dado pelo ângulo da projeção $\vec{r}$ no plano xy com o eixo x, contado positivo no sentido anti-horário; e φ é o ângulo polar, dado pelo ângulo do vetor $\vec{r}$ com o eixo z.

Coordenadas Esféricas

A lei de transformação de coordenadas cartesianas $P\,(x, y, z) \to P\,(r, \theta, \varphi)$ para coordenadas esféricas é:

$$
\begin{aligned}
x &= r\cos\theta\,\mathrm{sen}\varphi\,, \\
y &= r\,\mathrm{sen}\theta\,\mathrm{sen}\varphi\,, \\
z &= r\cos\varphi\qquad\quad .
\end{aligned}
$$

Com esta nomenclatura, $r = |\vec{r}| = |\vec{OP}|$ é o raio; θ é o ângulo azimutal, dado pelo ângulo da projeção $\vec{r}$ no plano xy com o eixo x, contado positivo no sentido anti-horário; e φ é o ângulo polar, dado pelo ângulo do vetor $\vec{r}$ com o eixo z.
A nomenclatura das coordenadas esféricas é bastante variada. Uma listagem pode ser encontrada clicando aqui.

Coordenadas Esféricas

A transformação do elemento diferencial de volume de coordenadas cartesianas para coordenadas esféricas é dado por:

$$dxdydz = |J| dr d\theta d\varphi\,,$$

onde

$$J = \det \begin{pmatrix} \partial x/\partial r & \partial y/\partial r & \partial z/\partial r \\ \partial x/\partial \theta & \partial y/\partial \theta & \partial z/\partial \theta \\ \partial x/\partial \varphi & \partial y/\partial \varphi & \partial z/\partial \varphi \end{pmatrix}\,.$$

Coordenadas Esféricas

A transformação do elemento diferencial de volume de coordenadas cartesianas para coordenadas esféricas é dado por:

$$dxdydz = |J| dr d\theta d\varphi \,,$$

onde

$$J = \det \begin{pmatrix} \partial x/\partial r & \partial y/\partial r & \partial z/\partial r \\ \partial x/\partial \theta & \partial y/\partial \theta & \partial z/\partial \theta \\ \partial x/\partial \varphi & \partial y/\partial \varphi & \partial z/\partial \varphi \end{pmatrix} .$$

Então:

$$dxdydz = r^2 \mathrm{sen}\varphi \, dr d\theta d\varphi$$

Coordenadas Esféricas

- Ex. 1:
  Usando a integral tripla em coordenadas esféricas, determine o volume de uma esfera de raio a.

Coordenadas Esféricas

- Ex. 1:
  Usando a integral tripla em coordenadas esféricas, determine o volume de uma esfera de raio a.

- Ex. 2:
  Encontre do sólido delimitado pela esfera $r = 1$ e o cone $\varphi = \pi/3$.