Cálculo 2 – ECT1212

Cálculo Vetorial

Prof. Ronaldo Carlotto Batista

20 de novembro de 2014

Integrais de linha

Podemos integrar uma função escalar $f = f\left(x, y, z\right)$ em um dado caminho C, esta integral é dada por

$$\int_{c} f\left(x, y, z\right) ds \, ,$$

onde ds é o diferencial de linha do caminho C.

Integrais de linha

Podemos integrar uma função escalar $f = f\left(x, y, z\right)$ em um dado caminho C, esta integral é dada por

$$\int_{c} f\left(x, y, z\right) ds\,,$$

onde ds é o diferencial de linha do caminho C.
Usualmente descrevemos o caminho C com uma curva parametrizada $\vec{r} = \vec{r}\left(t\right) = u\left(t\right)\hat{i} + v\left(t\right)\hat{j} + w\left(t\right)\hat{k}$, assim, usando a expressão

$$ds = \left|\frac{d\vec{r}}{dt}\right| dt\,,$$

podemos expressar a integral de linha da seguinte forma:

$$\int_{t=a}^{t=b} f\left(u\left(t\right), v\left(t\right), w\left(t\right)\right)\left|\frac{d\vec{r}}{dt}\right| dt\,,$$

onde a e b definem a extensão da curva.

Integrais de linha

- Ex. 1:
  Usando a integral de linha determine o perímetro do círculo.

Integrais de linha

- Ex. 1:
  Usando a integral de linha determine o perímetro do círculo.

- Ex. 2:
  Determine a massa de um fio semi-circular de raio a, com densidade linear $\lambda = \lambda_0 \left(x/a\right)^2$

Campos Vetoriais

Denotamos por campo vetorial uma função $\vec{F} = \vec{F}(x, y, z)$ que associa a cada ponto $P(x, y, z)$ do espaço, um vetor com as seguintes componentes:

$$\vec{F}(x, y, z) = M(x, y, z)\,\hat{i} + N(x, y, z)\,\hat{j} + Q(x, y, z)\,\hat{k}\,.$$

Campos Vetoriais

Denotamos por campo vetorial uma função $\vec{F} = \vec{F}(x, y, z)$ que associa a cada ponto $P(x, y, z)$ do espaço, um vetor com as seguintes componentes:

$$\vec{F}(x, y, z) = M(x, y, z)\,\hat{i} + N(x, y, z)\,\hat{j} + Q(x, y, z)\,\hat{k}\,.$$

- Ex. 1:
  Represente graficamente o campo vetorial $\vec{F}(x, y) = x\hat{i} + y\hat{j}$. É possível encontrar alguma função $\phi = \phi(x, y)$ tal que $\vec{F}(x, y) = \vec{\nabla}\phi$?

- Ex. 2:
  Represente graficamente o campo vetorial $\vec{F}(x, y) = y\hat{i} - x\hat{j}$. É possível encontrar alguma função $\phi = \phi(x, y)$ tal que $\vec{F}(x, y) = \vec{\nabla}\phi$?

Trabalho

O trabalho realizado por uma força $\vec{F}$ em uma partícula que segue uma trajetória $\vec{r} = \vec{r}(t)$, com $a \leq t \leq b$, é dado por:

$$W = \int_a^b \vec{F} \cdot d\vec{r}\,.$$

Trabalho

O trabalho realizado por uma força $\vec{F}$ em uma partícula que segue uma trajetória $\vec{r} = \vec{r}(t)$, com $a \leq t \leq b$, é dado por:

$$W = \int_a^b \vec{F} \cdot d\vec{r}\,.$$

- Ex. 1:
  Qual o trabalho realizado pela força $\vec{F} = (y - x^2)\,\hat{i} + (x - y^2)\,\hat{j}$ entre os pontos $(0,0)$ e $(1,1)$. Utilize um caminho dado por retas verticais e horizontais. Repita o cálculo para um outro caminho análogo, mas agora entre os pontos $(1,1)$ e $(0,0)$.

Trabalho

- Ex. 2:
  Qual o trabalho realizado pela força
  $\vec{F} = (y - x^2)\,\hat{i} + (z - y^2)\,\hat{j} + (x - z^2)\,\hat{k}$ entre os pontos
  $(0,0,0)$ e $(1,1,1)$ pelo caminho dado pela curva
  $\vec{r} = t\hat{i} + t^2\hat{j} + t^3\hat{k}$?

Circulação

A circulação de um campo vetorial $\vec{F}$ ao longo de uma curva fechada C é dada pela integral de linha:

$$\Gamma = \oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r}\,.$$

Circulação

A circulação de um campo vetorial $\vec{F}$ ao longo de uma curva fechada C é dada pela integral de linha:

$$\Gamma = \oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r}.$$

- Ex. 1:
  Determine a circulação do campo vetorial $\vec{F}(x, y) = x\hat{i} + y\hat{j}$ ao longo do círculo de raio a centrado na origem.

Circulação

A circulação de um campo vetorial $\vec{F}$ ao longo de uma curva fechada C é dada pela integral de linha:

$$\Gamma = \oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r}.$$

- Ex. 1:
  Determine a circulação do campo vetorial
  $\vec{F}(x,y) = x\hat{i} + y\hat{j}$ ao longo do círculo de raio a centrado na origem.

- Ex. 2:
  Determine a circulação do campo vetorial $\vec{F}(x,y) = -y\hat{i} + x\hat{j}$ ao longo de círculo de raio a centrado na origem.

Campos Conservativos

Um operador diferencial importante que usaremos no estudo de campos conservativos é o rotacional. O rotacional de um campo vetorial $\vec{F} = M(x, y, z)\,\hat{i} + N(x, y, z)\,\hat{j} + Q(x, y, z)\,\hat{k}$ é denotado por:

$$\vec{\nabla} \times \vec{F} \text{ ou } \mathrm{rot}\vec{F}\,.$$

Sua expressão é

$$\vec{\nabla} \times \vec{F} = \det \begin{pmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ M & N & Q \end{pmatrix}$$

Campos Conservativos

Um campo vetorial $\vec{F}$ é dito conservativo num aberto conexo D, se existir um campo escalar ϕ em D tal que:

$$\vec{F} = \vec{\nabla}\phi \, .$$

Para um campo conservativo, a integral de linha entre dois ponto A e B pode ser expressa na forma:

$$\int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_A^B \vec{\nabla}\phi \cdot d\vec{r} = \phi\,(B) - \phi\,(A) \ .$$

Neste caso diz-se que ϕ é o campo potencial de $\vec{F}$.

Campos Conservativos

As seguintes condições definem de forma equivalente um campo conservativo:

1. $$\oint_C \vec{F}\cdot d\vec{r} = 0 \text{ para qualquer curva lisa por partes fechada em } D,$$

2. O valor da integral de linha
$$\int_A^B \vec{F}\cdot d\vec{r}$$
é independente de caminho, e, se D é um conjunto simplesmente conexo,

3. $$\vec{\nabla}\times\vec{F} = \vec{0}$$

Campos Conservativos

- Ex. 1:
  Para o campo vetorial $\vec{F}(x, y) = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$, determine seu rotacional, seu campo escalar potencial e o trabalho entre realizado no deslocamento da origem até o ponto $B(1, 1, 2)$.

Campos Conservativos

- Ex. 1:
  Para o campo vetorial $\vec{F}(x,y) = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$, determine seu rotacional, seu campo escalar potencial e o trabalho entre realizado no deslocamento da origem até o ponto $B(1,1,2)$.

- Ex. 2:
  Verifique se o campo vetorial $\vec{F}(x,y) = -y\hat{i} + x\hat{j} + z^2\hat{k}$ é conservativo.

Teorema de Stokes no Plano

Seja um campo vetorial $\vec{F} = M(x, y)\,\hat{\imath} + N(x, y)\,\hat{\jmath}$ definido num aberto D de $\mathbb{R}^2$, o teorema de Stokes no Plano indica que:

$$\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \iint_R \left(\vec{\nabla} \times \vec{F}\right) \cdot \hat{k}\, dA\,,$$

onde C é uma curva contida em D e R a região delimitada por C.

O teorema de Stokes é originalmente aplicado ao espaço, sua apliação para o plano é equivalente ao teorema de Green.

Teorema de Stokes no Plano

O teorema de Green é usualmente expresso em função das componentes do campo vetorial, em coordenadas cartesianas temos:

$$\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \iint_R \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \right) dxdy .$$

Com essa expressão podemos dizer que todo campo conservativo satisfaz a igualdade:

$$\frac{\partial N}{\partial x} = \frac{\partial M}{\partial y} .$$

Teorema de Stokes no Plano

- Ex. 1:
  Para o campo vetorial $\vec{F}(x, y) = -y\hat{i} + x\hat{j}$, encontre sua circulação entre os pontos $(0, 0)$, $(1, 0)$,$(1, 1)$, $(0, 1)$ e $(0, 0)$, ligados por retas. Faça o mesmo utilizando o teorema de Stokes no Plano.

Teorema de Stokes no Plano

- Ex. 1:
  Para o campo vetorial $\vec{F}(x, y) = -y\hat{i} + x\hat{j}$, encontre sua circulação entre os pontos $(0, 0)$, $(1, 0)$,$(1, 1)$, $(0, 1)$ e $(0, 0)$, ligados por retas. Faça o mesmo utilizando o teorema de Stokes no Plano.

- Ex. 2:
  Seja o campo vetorial $\vec{F}(x, y) = M(x, y)\hat{i} + x^2\hat{j}$, determine a função M para que o campo seja conservativo.

Fluxo de um Campo Vetorial no Plano

O fluxo de um campo vetorial $\vec{F}(x, y) = M(x, y)\,\hat{i} + N(x, y)\,\hat{j}$ é dado pela integral de linha

$$\Phi = \oint_C \vec{F} \cdot \hat{n}\, ds\,,$$

onde $\hat{n}$ é o vetor unitário normal à curva C. Assumindo circulação no sentido anti-horário, tal vetor pode ser determinado pelo seguinte produto vetorial

$$\hat{n} = \hat{T} \times \hat{k}\,,$$

onde $\hat{T}$ é o versor tangente à curva C.

Fluxo de um Campo Vetorial no Plano

- Ex. 1:
  Encontre o fluxo do campo $\vec{F}(x, y) = x\hat{i} + y\hat{j}$ pela curva dada por um círculo de raio a.

Fluxo de um Campo Vetorial no Plano

- Ex. 1:
  Encontre o fluxo do campo $\vec{F}(x, y) = x\hat{i} + y\hat{j}$ pela curva dada por um círculo de raio a.

- Ex. 2:
  Encontre o fluxo do campo $\vec{F}(x, y) = -y\hat{i} + x\hat{j}$ pela curva dada por um círculo de raio a.

Teorema da Divergência no Plano

Para expressar este teorema, precisamos do operador divergente. Seja um campo vetorial $\vec{F} = M(x,y,z)\,\hat{i} + N(x,y,z)\,\hat{j} + Q(x,y,z)\,\hat{k}$, seu divergente é dado por:

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{F} = \frac{\partial M}{\partial x} + \frac{\partial N}{\partial y} + \frac{\partial Q}{\partial z}\,.$$

Teorema da Divergência no Plano

Para expressar este teorema, precisamos do operador divergente. Seja um campo vetorial $\vec{F} = M(x, y, z)\,\hat{\imath} + N(x, y, z)\,\hat{\jmath} + Q(x, y, z)\,\hat{k}$, seu divergente é dado por:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{F} = \frac{\partial M}{\partial x} + \frac{\partial N}{\partial y} + \frac{\partial Q}{\partial z}\,.$$

O teorema da divergência no plano estabelece que:

$$\oint_C \vec{F} \cdot \hat{n}\, ds = \iint_R \vec{\nabla} \cdot \vec{F}\, dA\,,$$

onde R é a região delimitada pela curva C.

Integrais de Superfície

Podemos representar um superfície como uma função vetorial de dois parâmetros:

$$\vec{r} = X\left(u,v\right)\hat{i} + Y\left(u,v\right)\hat{j} + Z\left(u,v\right)\hat{k}\,.$$

Sendo as funções X, Y, Z diferenciáveis, temos os seguintes vetores tangentes às linhas com u e v constantes

$$\frac{\partial\vec{r}}{\partial v} \text{ e } \frac{\partial\vec{r}}{\partial u}\,.$$

Com isso podemos construir o produto vetorial que indica o vetor normal à superfície:

$$\vec{n} = \frac{\partial\vec{r}}{\partial u} \times \frac{\partial\vec{r}}{\partial v}$$

Integrais de Superfície

Com isso podemos contruir o elemento diferencial de área da superfícil parametrizada por u e v:

$$dS = |\vec{n}| dudv \, .$$

Portanto, a área da superfície é dada pela integral

$$A_S = \iint_R |\vec{n}| dudv \, ,$$

onde R é a região do plano uv que mapeia a superfície de interesse.

Fluxo através de uma superfície

O fluxo de um campo vetorial tridimensional $\vec{F}$ através de um superfície S é definido pela integral:

$$\Phi = \iint_S \vec{F} \cdot \hat{n}\, dS\,,$$

onde $\hat{n}$ é o vetor nomal exterior à superfície.

Teorema de Stokes

$$\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \iint_S \left(\vec{\nabla} \times \vec{F}\right) \cdot \hat{n}\, dS \,,$$

onde S é uma superfície delimitada pela curva C.

Teorema da Divergência

$$\oiint_S \vec{F} \cdot \hat{n} \, dS = \iiint_V \vec{\nabla} \cdot \vec{F} \, dV \; ,$$

onde V é o volume delimitado pela superfície fechada S, que têm versor normal $\hat{n}$.

Exemplos

O cálculo vetorial tem inúmeras aplicações em física, por exemplo:

1. Equação da continuidade:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{v}) = 0\,.$$

2. Lei de Gauss:

$$\oiint_S \vec{E} \cdot \hat{n}\, dS = \frac{q}{\varepsilon_0}\,.$$

3. Lei de Ampère:

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{r} = \mu_0 i\,.$$

4. Equações de Maxwell: LINK.