ESCOLA DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA – UFRN
PROVA DE REPOSIÇÃO DE CÁLCULO 2 – ECT 1212 – Turma 2
04/12/2014

Profs. Ronaldo e Gabriel

Nome Legível:____

Assintatura:____

Q1	
Q2	
Q3	

Instruções:

1. **Leia todas as instruções antes de qualquer outra coisa.**
2. **A resolução das questões pode ser feita com grafite.**
3. **Faça uma prova organizada e detalhada, apresentando as respostas de forma coerente, de modo que todas as justificativas relevantes no contexto da disciplina devem estar presentes na solução. Indique bem o que você está fazendo pois resultados sem explicação e/ou desorganizados não serão considerados.**
4. **Resolva cada questão na frente e/ou verso da folha onde ela se encontra.**
5. **As duas últimas folhas são de rascunho e não serão corrigidas.**

Questão 1. (2,5 pontos)

Considere a função vetorial $\vec{r} = a\cos t\,\hat{i} + a\sin t\,\hat{j}$, que retrata uma circunferência de raio a, com $0 \leqslant t \leqslant 2\pi$. a) Calcule vetor velocidade $\vec{v}(t)$.

b) Calcule o vetor tangente $\vec{T}$.

c) Calcule o vetor normal $\vec{N}$.

d) Verifique que o produto escalar $\vec{T} \cdot \vec{N} = 0$.

e) (BÔNUS) (0,5 ponto)Acrescentando agora a seguinte componente vertical em $\vec{r} = a\cos t\,\hat{i} + a\sin t\,\hat{j} + t\,\hat{k}$ modifica a curva de que maneira?

Questão 2. (2,5 pontos)

Considere a função $w = \sin(xy)$, onde:

$$\begin{aligned} x &= e^t \\ y &= \ln(t+1) \end{aligned}$$

a) Monte o esquema da árvore usando a regra da cadeia para estruturar $\frac{dw}{dt}$.

b) Calcule $\frac{\partial w}{\partial x}$, $\frac{\partial w}{\partial y}$, $\frac{dx}{dt}$ e $\frac{dy}{dt}$.

c) Calcule a derivada $\frac{dw}{dt}$ em $t = 0$.

Questão 3. (2,0 pontos)

Determine a área delimitada pelas curvas $x^2+y^2=2x$ e $r=1+\cos(\theta)$ no primeiro quadrante do plano xy.

Solução:
Vamos primeiro expressar a equação da curva $x^2+y^2=2x$ em coordenadas polares:

$$(r\cos(\theta))^2+(r\,\text{sen}(\theta))^2=2r\cos(\theta)\ .$$

Simplificando, temos:

$$r^2=2r\cos(\theta)\ ,$$

$$r=2\cos(\theta)\ .$$

Com isso podemos podemos calcular tal área com a seguinte integral dupla:

$$A=\int_0^{\pi/2}d\theta\int_{2\cos(\theta)}^{1+\cos(\theta)}r\,dr$$

$$A=\int_0^{\pi/2}d\theta\left[\frac{r^2}{2}\right]_{2\cos(\theta)}^{1+\cos(\theta)}$$

$$A=\frac{1}{2}\int_0^{\pi/2}d\theta\left[1+2\cos(\theta)+\cos^2(\theta)-4\cos^2(\theta)\right]$$

$$A=\frac{1}{2}\int_0^{\pi/2}d\theta\left[1+2\cos(\theta)-3\cos^2(\theta)\right]$$

$$A=\left[\frac{\theta}{2}+\text{sen}(\theta)\right]_0^{\pi/2}-\frac{3}{2}\int_0^{\pi/2}d\theta\cos^2(\theta)$$

$$A=\frac{\pi}{4}+\text{sen}(\pi/2)-\frac{3}{2}\int_0^{\pi/2}d\theta\left[\frac{1}{2}+\frac{\cos(2\theta)}{2}\right]$$

$$A=\frac{\pi}{4}+1-\frac{3}{2}\left[\frac{\theta}{2}+\frac{\text{sen}(2\theta)}{4}\right]_0^{\pi/2}$$

$$A=\frac{\pi}{4}+1-\frac{3\pi}{8}-\frac{3}{2}\frac{\text{sen}(\pi)}{4}$$

$$A=1-\frac{\pi}{8}\ \text{u.a.}$$

Questão 4. (3,0 pontos)

Seja o campo vetorial $\vec{F}$: $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, dado por $\vec{F} = x\hat{\imath} + y^2\hat{\jmath}$. Determine o fluxo deste campo através da circunferência de raio 2 centrada na origem das seguintes formas: (a) fazendo a integral de fluxo $\oint_C \vec{F}\cdot\hat{n}\, ds$ (1,5 pontos) e (b) utilizando o teorema da divergência no plano (1,5 pontos).

Solução.

(a)

Podemos parametrizar a curva dada da seguinte maneira:

$$\vec{r} = 2\cos(t)\,\hat{\imath} + 2\mathrm{sen}\,(t)\,\hat{\jmath}\,,$$

com $2\pi \geq t \geq 0$. O vetor tangente à curva é dado por:

$$\vec{T} = \frac{d\vec{r}}{dt} = -2\mathrm{sen}\,(t)\,\hat{\imath} + 2\cos(t)\,\hat{\jmath}\,,$$

seu módulo é 2, então $\hat{T} = \mathrm{sen}\,(t)\,\hat{\imath} + \cos(t)\,\hat{\jmath}$. O vetor normal à curva é dado pelo produto vetorial:

$$\hat{n} = \hat{T} \times \hat{k}$$

$$\hat{n} = \cos(t)\,\hat{\imath} + \mathrm{sen}\,(t)\,\hat{\jmath}\,.$$

Também precisamos do diferencial de linha:

$$ds = |\vec{T}|dt = 2dt\,,$$

e da expressão do campo vetorial em função da parametrização da curva:

$$\vec{F} = 2\cos(t)\,\hat{\imath} + (2\mathrm{sen}\,(t))^2\,\hat{\jmath}$$

$$\vec{F} = 2\cos(t)\,\hat{\imath} + 4\mathrm{sen}^2\,(t)\,\hat{\jmath}\,.$$

O produto escalar da integral de fluxo é dado por:

$$\vec{F}\cdot\hat{n} = 2\cos^2(t) + 4\mathrm{sen}^3\,(t)$$

Finalmente, podemos expressar a integral de fluxo

$$\Phi = \oint_C \vec{F}\cdot\hat{n}\,ds = \int_0^{2\pi} \left[2\cos^2(t) + 4\mathrm{sen}^3\,(t)\right] 2dt\,.$$

O cálculo das primitivas indica:

$$\int \cos^2(t)\,dt = \int \left[\frac{1}{2} + \frac{\cos(2t)}{2}\right] dt = \frac{t}{2} + \frac{\mathrm{sen}\,(2t)}{4}$$

e

$$\int \mathrm{sen}^3\,(t)\,dt = \int \left(1 - \cos^2(t)\right)\mathrm{sen}\,(t)\,dt = -\cos(t) + \frac{\cos^3(t)}{3}$$

então

$$\Phi = 4\left[\frac{t}{2} + \frac{\mathrm{sen}\,(2t)}{4}\right]_0^{2\pi} + 8\left[-\cos(t) + \frac{\cos^3(t)}{3}\right]_0^{2\pi}$$

$$\Phi = 4\pi\,.$$

(b)

O teorema da divergência estabelece que

$$\oint_C \vec{F} \cdot \hat{n}\, ds = \iint_R \vec{\nabla} \cdot \vec{F}\, dA\,,$$

onde R é a região encerrada pela curva C. O divergente em questão é dado por:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{F} = \left(\hat{i}\frac{\partial}{\partial x} + \hat{j}\frac{\partial}{\partial y}\right) \cdot \left(x\hat{i} + y^2\hat{j}\right) = 1 + 2y\,,$$

e a região R é um círculo de raio 2 centrado na origem. Então, temos a seguinte integral de área:

$$\iint_R \vec{\nabla} \cdot \vec{F}\, dA = \iint_R (2y+1)\; dA = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^2 drr\,(2r\text{sen}\,(\theta) + 1)\;,$$

que foi expressa em coordenadas polares. Resolvendo a integral temos:

$$\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^2 drr\,(2r\text{sen}\,(\theta) + 1) = \int_0^{2\pi} d\theta \left[2\frac{r^3\text{sen}\,(\theta)}{3} + \frac{r^2}{2}\right]_0^2$$

$$\int_0^{2\pi} d\theta \left[\frac{16\text{sen}\,(\theta)}{3} + 2\right] = \left[-\frac{16\cos\,(\theta)}{3} + 2\theta\right]_0^{2\pi} = 4\pi$$

que é exatamente o resultado obtido pela integral de fluxo.