ESCOLA DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA – UFRN
TERCEIRA PROVA DE CÁLCULO 2 – ECT 1212 – Turma 2
27/11/2014

Prof. Ronaldo

Nome Legível:____

Assintatura:____

Instruções:

1. **Leia todas as instruções antes de qualquer outra coisa.**
2. **A resolução das questões pode ser feita com grafite.**
3. **Faça uma prova organizada e detalhada, apresentando as respostas de forma coerente, de modo que todas as justificativas relevantes no contexto da disciplina devem estar presentes na solução. Indique bem o que você está fazendo pois resultados sem explicação e/ou desorganizados não serão considerados.**
4. **Resolva cada questão na frente e/ou verso da folha onde ela se encontra.**
5. **As duas últimas folhas são de rascunho e não serão corrigidas.**

Q1	
Q2	
Q3	

Questão 1. (3,0 pontos)

Seja um campo vetorial $\vec{F}$: $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dado por $\vec{F} = \vec{A} + \vec{B}$, onde $\vec{A} = \vec{\nabla}\phi$ e $|\vec{\nabla} \times \vec{B}| = 2$. Determine os possíveis valores da integral

$$\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r},$$

sob (qualquer) alguma curva fechada C de sua escolha.

Solução.
A integral a ser calculada é a seguinte

$$\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \oint_C \vec{\nabla}\phi \cdot d\vec{r} + \oint_C \vec{B} \cdot d\vec{r}.$$

Para qualquer função escalar ϕ, temos:

$$\int_A^B \vec{\nabla}\phi \cdot d\vec{r} = \phi(B) - \phi(A) \ ,$$

Para uma curva fechada, o ponto incial e final são os mesmos, isto é, $A = B$ portanto a integral sob qualquer curva fechada será:

$$\oint_C \vec{\nabla}\phi \cdot d\vec{r} = \int_A^A \vec{\nabla}\phi \cdot d\vec{r} = \phi(A) - \phi(A) = 0\,.$$

Para resolver a integral restante, podemos utilizar o teorema de Stokes no plano:

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{r} = \iint_R \left(\vec{\nabla} \times \vec{B}\right) \cdot \hat{k} dA \,,$$

onde R é a região limitada pela curva C. Sabendo que o campo vetorial está definido no plano, seu rotacional só pode ser na direção de $\hat{k}$. Também sabemos que $|\vec{\nabla} \times \vec{B}| = 2$, então temos as seguintes possibilidades:

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = 2\hat{k} \;\text{ ou }\; \vec{\nabla} \times \vec{B} = -2\hat{k} \,.$$

Com isso a integral de área é dada por:

$$\iint_R \left(\vec{\nabla} \times \vec{B}\right) \cdot \hat{k} dA = \pm 2 \iint_R dA \,.$$

Podemos escolher qualquer curva, tomando um quadrado de lado a centrado na origem, temos

$$\iint_R dA = a^2 \,,$$

portanto os possíveis valores da integral para a curva escolhida são:

$$\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \pm 2a^2 \,.$$

Questão 2. (3,5 pontos)

Determine o volume do sólido delimitado por uma casca esférica de raio 2, centrada na origem, e o plano $z = 1$, com $z \leq 1$.

Solução.

O volume de interesse é dado pelo volume total da esfera de raio 2, $4\pi(2)^3/3 = 32\pi/3$, menos o volume da calota desta mesma esfera quando cortada pelo plano $z = 1$. Este volume é dado por:

$$V_c = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\varphi_m} d\varphi \text{sen}\varphi \int_{r_m}^{2} dr r^2 \,,$$

onde φ_m é o maior ângulo entre o eixo z e os pontos do plano $z = 1$ e r_m é função que descreve a parte do plano $z = 1$ é interna à esfera.

Podemos construir um triângulo retângulo no plano yz com um vértice na origem, um no ponto $(0, 0, 1)$ e outro no ponto $(0, y_m, 1)$. Neste último ponto y_m é a coordenada do ponto que está na superfície da esfera e também no plano, então sabemos que a distância deste ponto até a origem é 2, sendo esta medida a hipotenusa do triângulo. Desta forma, analisando as medidas dos lados do triângulo, temos

$$\cos(\varphi_m) = \frac{1}{2} \Rightarrow \varphi_m = \pi/3 \,.$$

A função r_m é dada pela distância da origem aos pontos do plano, então temos:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \sqrt{x^2 + y^2 + 1} \,,$$

em coordenadas esféricas temos:

$$r = \sqrt{r^2 \text{sen}^2\varphi + 1} \,,$$

resolvendo para r temos

$$r_m = r = \frac{1}{\cos\varphi} \,,$$

onde $0 \leq \varphi \leq \pi/3$.

Então temos que resolver a seguinte integral:

$$V_c = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\pi/3} d\varphi \text{sen}\varphi \int_{\frac{1}{cos\varphi}}^{2} dr r^2$$

$$V_c = 2\pi \int_0^{\pi/3} d\varphi \text{sen}\varphi \left[\frac{r^3}{3}\right]_{\frac{1}{cos\varphi}}^{2}$$

$$V_c = 2\pi \int_0^{\pi/3} d\varphi \left[\frac{8\text{sen}\varphi}{3} - \frac{\text{sen}\varphi}{3\cos^3\varphi}\right]$$

$$V_c = 2\pi \left[-\frac{8\cos\varphi}{3} - \frac{1}{6\cos^2\varphi}\right]_0^{\pi/3}$$

$$V_c = \frac{2\pi}{3}\left[-8\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + 8\cos(0) - \frac{1}{2\cos^2(\pi/3)} + \frac{1}{2\cos^2(0)}\right]$$

$$V_c = \frac{2\pi}{3}\left[-4 + 8 - 2 + \frac{1}{2}\right] = \frac{5\pi}{3}\,.$$

Finalmente, o volume de interesse é dado por

$$V = V_T - V_c = \frac{32\pi}{3} - \frac{5\pi}{3}$$

$$V = 9\pi\,.$$

Questão 3. (3,5 pontos)

Seja o campo vetorial $\vec{F}$: $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, dado por $\vec{F} = x^2\hat{\imath} + y\hat{\jmath}$. Determine o fluxo deste campo através da circunferência de raio 2 centrada na origem das seguintes formas: (a) fazendo a integral de fluxo $\oint_C \vec{F}\cdot\hat{n}\, ds$ (2,0 pontos) e (b) utilizando o teorema da divergência no plano (1,5 pontos).

Solução.

(a)

Podemos parametrizar a curva dada da seguinte maneira:

$$\vec{r} = 2\cos(t)\,\hat{\imath} + 2\mathrm{sen}\,(t)\,\hat{\jmath}\,,$$

com $2\pi \geq t \geq 0$. O vetor tangente à curva é dado por:

$$\vec{T} = \frac{d\vec{r}}{dt} = -2\mathrm{sen}\,(t)\,\hat{\imath} + 2\cos(t)\,\hat{\jmath}\,,$$

seu módulo é 2, então $\hat{T} = \mathrm{sen}\,(t)\,\hat{\imath} + \cos(t)\,\hat{\jmath}$. O vetor normal à curva é dado pelo produto vetorial:

$$\hat{n} = \hat{T} \times \hat{k}$$

$$\hat{n} = \cos(t)\,\hat{\imath} + \mathrm{sen}\,(t)\,\hat{\jmath}\,.$$

Também precisamos do diferencial de linha:

$$ds = |\vec{T}|dt = 2dt\,,$$

e da expressão do campo vetorial em função da parametrização da curva:

$$\vec{F} = (2\cos(t))^2\,\hat{\imath} + 2\mathrm{sen}\,(t)\,\hat{\jmath}$$

$$\vec{F} = 4\cos^2(t)\,\hat{\imath} + 2\mathrm{sen}\,(t)\,\hat{\jmath}\,.$$

O produto escalar da integral de fluxo é dado por:

$$\vec{F}\cdot\hat{n} = 4\cos^3(t) + 2\mathrm{sen}^2\,(t)$$

Finalmente, podemos expressar a integral de fluxo

$$\Phi = \oint_C \vec{F}\cdot\hat{n}\,ds = \int_0^{2\pi} \left[4\cos^3(t) + 2\mathrm{sen}^2\,(t)\right] 2dt\,.$$

O cálculo das primitivas indica:

$$\int \cos^3(t)\,dt = \int \left(1 - \mathrm{sen}^2\,(t)\right)\cos(t)\,dt = \mathrm{sen}\,(t) - \frac{\mathrm{sen}^3\,(t)}{3}$$

e

$$\int \mathrm{sen}^2\,(t)\,dt = \int \left[\frac{1}{2} - \frac{\cos(2t)}{2}\right] dt = \frac{t}{2} - \frac{\mathrm{sen}\,(2t)}{4}$$

então

$$\Phi = 8\left[\mathrm{sen}\,(t) - \frac{\mathrm{sen}^3\,(t)}{3}\right]_0^{2\pi} + 4\left[\frac{t}{2} - \frac{\mathrm{sen}\,(2t)}{4}\right]_0^{2\pi}$$

$$\Phi = 4\pi \, .$$

(b)
O teorema da divergência estabelece que

$$\oint_C \vec{F} \cdot \hat{n} \, ds = \iint_R \vec{\nabla} \cdot \vec{F} \, dA \, ,$$

onde R é a região encerrada pela curva C. O divergente em questão é dado por:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{F} = \left(\hat{i} \frac{\partial}{\partial x} + \hat{j} \frac{\partial}{\partial y} \right) \cdot \left(x^2 \hat{i} + y \hat{j} \right) = 2x + 1 \, ,$$

e a região R é um círculo de raio 2 centrado na origem. Então, temos a seguinte integral de área:

$$\iint_R \vec{\nabla} \cdot \vec{F} \, dA = \iint_R (2x + 1) \; dA = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^2 dr r \left(2r\cos(\theta) + 1 \right) \, ,$$

que foi expressa em coordenadas polares. Resolvendo a integral temos:

$$\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^2 dr r \left(2r\cos(\theta) + 1 \right) = \int_0^{2\pi} d\theta \left[2\frac{r^3\cos(\theta)}{3} + \frac{r^2}{2} \right]_0^2$$

$$\int_0^{2\pi} d\theta \left[\frac{16\cos(\theta)}{3} + 2 \right] = \left[\frac{16\text{sen}(\theta)}{3} + 2\theta \right]_0^{2\pi} = 4\pi$$

que é exatamente o resultado obtido pela integral de fluxo.