ESCOLA DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA – UFRN
SEGUNDA PROVA DE CÁLCULO 2 – ECT 1212 – Turma 2
16/10/2014

Profs. Gabriel e Ronaldo

Nome Legível:____

Assintatura:____

Instruções:

1. **Leia todas as instruções antes de qualquer outra coisa.**
2. **A resolução das questões pode ser feita com grafite.**
3. **Faça uma prova organizada e detalhada, apresentando as respostas de forma coerente, de modo que todas as justificativas relevantes no contexto da disciplina devem estar presentes na solução. Indique bem o que você está fazendo pois resultados sem explicação e/ou desorganizados não serão considerados.**
4. **Resolva cada questão na frente e/ou verso da folha onde ela se encontra.**
5. **As duas últimas folhas são de rascunho e não serão corrigidas.**

Q1	
Q2	
Q3	
Q4	

Questão 1.

Considere a função $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$.

a)(1,5 ponto) Encontre as derivadas parciais $\partial f/\partial x$ e $\partial f/\partial y$.

b)(0,5 ponto) Calcule o vetor gradiente $\nabla f = (\partial f/\partial x, \partial f/\partial y)$ no ponto $P_0 = (1,0)$.

c)(0,5 ponto) Encontre a derivada direcional de f em $P_0 = (1,0)$ na direção do vetor unitário $\hat{u} = (0,1) = 0\,\hat{i} + 1\,\hat{j}$, dada por:

$\frac{df}{ds}\,|_{\hat{u},P_0} = (\nabla f)_{P_0} \cdot \hat{u}$

d)(0,5 ponto)(BÔNUS) Qual o ângulo entre $\hat{u}$ e o vetor ∇f? Com o resultado da derivada calculada em c) determine o comportamento da função f no ponto P_0.

Questão 2.

Suponha que substituamos coordenadas polares $x = r\cos\theta$ e $y = r\sin\theta$ em uma função diferenciável $w = f(x,y)$.

a)(1,25 pontos) Mostre que

$$\begin{aligned} \frac{\partial w}{\partial r} &= f_x \cos\theta + f_y \sin\theta \\ \frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial \theta} &= -f_x \sin\theta + f_y \cos\theta \end{aligned}$$

b)(1,25 pontos) Resolva as equações no item a) para expressar f_x e f_y em termos de $\frac{\partial w}{\partial r}$ e $\frac{\partial w}{\partial \theta}$.

c)(0,5 ponto)(BÔNUS) Mostre que

$$(f_x)^2 + (f_y)^2 = \left(\frac{\partial w}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial w}{\partial \theta}\right)^2$$

Questão 3. (2,5 pontos)

Determine o volume delimitado pelo plano $x + y + z = 12$ e a região no plano xy, delimitada pelas funções $y_1 = 4x$ e $y_2 = x^3$, com $x \geq 0$ (1,5 ponto). Inverta a ordem de integração da integral obtida inicialmente e resolva-a novamente. (1,0)

Solução:

A região de integração no plano xy que $x^3 \leq y \leq x$ e $0 \leq x \leq 2$, então o volume é dado pela seguinte integral dupla:

$$V = \int_0^2 \int_{x^3}^{4x} (12 - x - y)\, dy dx$$

$$V = \int_0^2 \left[(12 - x)\, y - \frac{y^2}{2} \right]_{x^3}^{4x} dx$$

$$V = \int_0^2 \left[(12 - x)(4x) - \frac{16x^2}{2} - (12 - x)\, x^3 + \frac{x^6}{2} \right] dx$$

$$V = \int_0^2 \left[48x - 4x^2 - 8x^2 - 12x^3 + x^4 + \frac{x^6}{2} \right] dx$$

$$V = \int_0^2 \left[48x - 12x^2 - 12x^3 + x^4 + \frac{x^6}{2} \right] dx$$

$$V = \left[48\frac{x^2}{2} - 12\frac{x^3}{3} - 12\frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} + \frac{x^7}{14} \right]_0^2$$

$$V = \left[24x^2 - 4x^3 - 3x^4 + \frac{x^5}{5} + \frac{x^7}{14} \right]_0^2$$

$$V = 24 \cdot 2^2 - 4 \cdot 2^3 - 3 \cdot 2^4 + \frac{2^5}{5} + \frac{2^7}{14}$$

$$V = 3 \cdot 2^3 \cdot 2^2 - 2^2 \cdot 2^3 - 3 \cdot 2^4 + \frac{2^5}{5} + \frac{2^7}{2 \cdot 7}$$

$$V = 3 \cdot 2^5 - 2^5 - 3 \cdot 2^4 + \frac{2^5}{5} + \frac{2^6}{7}$$

$$V = 2^6 - 3 \cdot 2^4 + \frac{2 \cdot 2^4}{5} + \frac{2^6}{7} = 2^6 \left(1 + \frac{1}{7} \right) + 2^4 \left(\frac{2}{5} - 3 \right) = \frac{8}{7} 2^6 - \frac{13}{5} 2^4$$

$$V = \left(\frac{32}{7} - \frac{13}{5} \right) 2^4 = \frac{160 - 91}{35} 2^4 = \frac{69}{35} 2^4 = \frac{1104}{35}$$

$$V = \frac{1104}{35} \text{ u.v. (0,3 ponto)}$$

Invertendo a ordem de integração temos a região:

$$V = \int_0^8 \int_{y/4}^{y^{1/3}} (12 - x - y)\, dxdy$$

$$V = \int_0^8 \left[(12 - y)\, x - \frac{x^2}{2} \right]_{y/4}^{y^{1/3}} dy$$

$$V = \int_0^8 \left[(12 - y)\, y^{1/3} - \frac{y^{2/3}}{2} - (12 - y)\, \frac{y}{4} + \frac{y^2}{32} \right] dy$$

$$V = \int_0^8 \left[12y^{1/3} - y^{4/3} - \frac{y^{2/3}}{2} - 3y + \frac{y^2}{4} + \frac{y^2}{32} \right] dy$$

$$V = \int_0^8 \left[12y^{1/3} - y^{4/3} - \frac{y^{2/3}}{2} - 3y + \frac{9y^2}{32} \right] dy$$

$$V = \left[12\frac{3}{4}y^{4/3} - \frac{3}{7}y^{7/3} - \frac{3}{5}\frac{y^{5/3}}{2} - \frac{3}{2}y^2 + \frac{3y^3}{32} \right]_0^8$$

$$V = 9 \cdot 2^4 - \frac{3}{7}2^7 - \frac{3}{5}\frac{2^5}{2} - \frac{3}{2}2^6 + \frac{3 \cdot 2^9}{32}$$

$$V = 9 \cdot 2^4 - \frac{3}{7}2^7 - \frac{3}{5}2^4 - 3 \cdot 2^5 + 3 \cdot 2^4$$

$$V = 2^4 \left(12 - \frac{3 \cdot 8}{7} - \frac{3}{5} - 6 \right) = 2^4 \left(\frac{6 \cdot 35 - 24 \cdot 5 - 3 \cdot 7}{35} \right)$$

$$V = 2^4 \frac{69}{35}$$

$$V = \frac{1104}{35} \text{ u.v. (0,2 ponto)}$$

Questão 4. (2,5 pontos)

Determine a área delimitada pelas curvas $x^2+y^2=2x$ e $r=2+\cos(\theta)$ no primeiro quadrante do plano xy.

Solução:

Vamos primeiro expressar a equação da curva $x^2+y^2=2x$ em coordenadas polares:

$$(r\cos(\theta))^2+(r\text{sen}(\theta))^2=2r\cos(\theta)\ .$$

Simplificando, temos:

$$r^2=2r\cos(\theta)\ ,$$

$$r=2\cos(\theta)\ .$$

Com isso podemos podemos calcular tal área com a seguinte integral dupla:

$$A=\int_0^{\pi/2}d\theta\int_{2\cos(\theta)}^{2+\cos(\theta)}r\,dr$$

$$A=\int_0^{\pi/2}d\theta\left[\frac{r^2}{2}\right]_{2\cos(\theta)}^{2+\cos(\theta)}$$

$$A=\frac{1}{2}\int_0^{\pi/2}d\theta\left[4+4\cos(\theta)+\cos^2(\theta)-4\cos^2(\theta)\right]$$

$$A=\frac{1}{2}\int_0^{\pi/2}d\theta\left[4+4\cos(\theta)-3\cos^2(\theta)\right]$$

$$A=\left[2\theta+2\text{sen}(\theta)\right]_0^{\pi/2}-\frac{3}{2}\int_0^{\pi/2}d\theta\cos^2(\theta)$$

$$A=\pi+2\text{sen}(\pi/2)-\frac{3}{2}\int_0^{\pi/2}d\theta\left[\frac{1}{2}+\frac{\cos(2\theta)}{2}\right]$$

$$A=\pi+2-\frac{3}{2}\left[\frac{\theta}{2}+\frac{\text{sen}(2\theta)}{4}\right]_0^{\pi/2}$$

$$A=\pi+2-\frac{3\pi}{8}-\frac{3}{2}\frac{\text{sen}(\pi)}{4}$$

$$A=2+\frac{5\pi}{8}\text{ u.a.}$$