Cálculo 3 – ECT1212
Lista de Exercícios – Cálculo Vetorial
Prof. Ronaldo

18 de novembro de 2014

1 Integrais de linha

1. Utilizando a integral de linha, determine a massa de um fio delgado em forma de círculo de raio a cuja densidade linear é $\lambda = \lambda_0 \left((x/a)^2 + (y/a)^2\right)$. Este resultado poderia ser determinado de uma forma mais simples?

2. Determine a massa de um fio delgado em forma de círculo de raio a cuja densidade linear é $\lambda = \lambda_0 (y/a)^2$.

3. Calcule a integral

$$\int_C (xy + y + z)\, ds$$

ao longo da curva $\vec{r}(t) = 2t\hat{\imath} + t\hat{\jmath} + (2 - 2t)\hat{k}$, com $0 \leq t \leq 1$.

2 Trabalho e circulação

1. Qual o trabalho realizado pela força $\vec{F} = x^2\hat{\imath} + y^2\hat{\jmath}$ nos seguintes caminhos:

   (a) Do ponto $(0, 0)$ ao ponto $(1, 0)$, ligados por uma reta.

   (b) Do ponto $(1, 0)$ ao ponto $(1, -1)$, ligados por uma reta.

   (c) Do ponto $(1, -1)$ ao ponto $(0, -1)$, ligados por uma reta.

   (d) Do ponto $(0, -1)$ ao ponto $(0, 1)$, ligados por um círculo, no sentido anti-horário.

   (e) Do ponto $(0, 1)$ ao ponto $(0, 0)$, ligados por uma reta.

2. Para o campo vetorial do exercício anterior, determine sua circulação no caminho fechado descrito no exercício. Determine também sua circulação em torno de um elipse centrada na origem, de eixo maior a e eixo menor b.

3. Determine a circulação do campo vetorial $\vec{F} = -y\hat{\imath} + x\hat{\jmath}$ e calcule o trabalho realizado por dois caminhos diferentes que liguem os pontos $(0, 0)$ e $(1, 1)$.

4. Seja um campo escalar $\phi(x, y, z) = r^n$, onde $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$. Mostre que ϕ é o potencial do seguinte campo vetorial $\vec{F} = nr^{n-2}\vec{r}$, onde $\vec{r} = x\hat{\imath} + y\hat{\jmath} + z\hat{k}$. Para qual valor de n este campo vetorial representa a força gravitacional?

5. Verifique se campo vetorial $\vec{F} = yz\hat{\imath} + xz\hat{\jmath} + xy\hat{k}$ é convervativo. Caso seja, determine seu potencial e o trabalho realizado entre os pontos $(-1, 0, 1)$ e $(1, 2, 2)$.

6. Mostre que um campo vetorial no plano dado por $\vec{F} = \vec{\nabla}\phi$ tem circulação nula para qualquer caminho.

7. Seja um campo vetorial no plano, dado por $\vec{F} = \vec{\nabla}\phi + \vec{\nabla} \times \vec{B}$, tal que $\vec{\nabla} \times \vec{B}$ é um vetor constante de módulo 2. Determine as possíveis soluções da integral

$$\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r},$$

onde o caminho C é um círculo de raio 1 centrado na origem.

8. Seja um campo vetorial na forma $\vec{F} = xy^3\hat{\imath} + N(x, y)\hat{\jmath}$, determine N para que o campo seja conservativo.

3 Fluxo

1. Para os campos vetoriais e curvas dadas abaixo, determine o fluxo através da curva com a integral de fluxo e posteriormente verifique o resultado utilizando o teorema da divergência no plano.

   (a) $\vec{F} = x\hat{i} + y\hat{j}$ através da circunferência de raio 1 centrada no ponto $(1, 0)$.

   (b) $\vec{F} = x^2\hat{i} + y^2\hat{j}$ através da circunferência de raio a centrada na origem.

   (c) $\vec{F} = -x^2\hat{i} - y^2\hat{j}$ através da circunferência de raio a centrada na origem.

   (d) $\vec{F} = y^2\hat{i} - x^2\hat{j}$ através da circunferência de raio a centrada na origem.

2. Determine o fluxo dos campos vetoriais dados abaixo, através do quadrado de lado 2 centrado na origem:

   (a) $\vec{F} = x\hat{i} + y\hat{j}$

   (b) $\vec{F} = xy^3\hat{i} + xy\hat{j}$

   (c) $\vec{F} = y^2\hat{i} - x^2\hat{j}$