Cálculo 1 – ECT2103

Slides de apoio sobre Limites e Derivadas

Prof. Ronaldo Carlotto Batista

29 de julho de 2021

AVISO IMPORTANTE

Estes slides foram criados como material de apoio às aulas e não devem ser utilizados como único material didático. O conteúdo apresentado aqui está no capítulo 3 do livro Cálculo A, Flemming & Gonçalves, 6ª Ed (livro texto); ou ainda, alternativamente, no capítulo 2 do livro Cálculo, George B. Thomas, Vol. 1 , 11º Ed.

Noção Intuitiva de Limite

Neste curso vamos trabalhar com funções reais, $f : [a, b] \to \mathbb{R}$. Se $c \in [a, b]$, o limite de f quando x tende a c é um número L quando os valores $f(x)$ se aproximarem de L à medida que x tende a c, o que representamos por

$$\lim_{x \to c} f(x) = L\,.$$

Noção Intuitiva de Limite

A noção intuitiva de limite aparece, por exemplo, se quisermos calcular a velocidade instantânea de uma partícula. Seja sua posição $x(t)$ dada por

$$x(t) = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2}at^2 .$$

A velocidade média é dada por:

$$v_m = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x(t_2) - x(t_1)}{t_2 - t_1} .$$

Noção Intuitiva de Limite

A noção intuitiva de limite aparece, por exemplo, se quisermos calcular a velocidade instantânea de uma partícula. Seja sua posição $x(t)$ dada por

$$x(t) = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a t^2 .$$

A velocidade média é dada por:

$$v_m = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x(t_2) - x(t_1)}{t_2 - t_1} .$$

Tomando, $\Delta t = h$, $t_1 = t$ e h tão pequeno quanto se queira, temos a velocidade instantânea em t dada pelo limite:

$$v(t) = \lim_{h \to 0} \frac{x(t+h) - x(t)}{h} .$$

Noção Intuitiva de Limite

A noção intuitiva de limite aparece, por exemplo, se quisermos calcular a velocidade instantânea de uma partícula. Seja sua posição $x(t)$ dada por

$$x(t) = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a t^2 .$$

A velocidade média é dada por:

$$v_m = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x(t_2) - x(t_1)}{t_2 - t_1} .$$

Tomando, $\Delta t = h$, $t_1 = t$ e h tão pequeno quanto se queira, temos a velocidade instantânea em t dada pelo limite:

$$v(t) = \lim_{h \to 0} \frac{x(t+h) - x(t)}{h} .$$

Com isso temos:

$$v(t) = v_0 + at .$$

Cálculo dos Limites

O limite de uma função $f(x)$ quando $x \to x_0$ pode existir mesmo que $f(x_0)$ não exista. Vejamos o seguinte exemplo:

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1}.$$

Cálculo dos Limites

O limite de uma função $f(x)$ quando $x \to x_0$ pode existir mesmo que $f(x_0)$ não exista. Vejamos o seguinte exemplo:

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1}\,.$$

A função não é definida em $x = 1$, no entanto seu limite existe:

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = 2\,.$$

Definição Formal de Limite

Seja $f(x)$ definida em um aberto em torno de x_0, exceto talvez em x_0. O limite

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = L\,,$$

existe se para qualquer $\varepsilon > 0$ existir um $\delta > 0$ tal que

$$0 < |x - x_0| < \delta \;\Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon\,.$$

Quando o limite não existe?

A ideia intuitiva de limite determina o valor para o qual uma função $f(x)$ tende quando $x \to x_0$. Em alguns casos, o limite pode não existir, por exemplo:

- Exemplo 1:
  Justifique porque o limite $\lim_{x \to 0} f(x)$ não existe.

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x < 0 \\ 1 & \text{se } x \geq 0 \end{cases}$$

Quando o limite não existe?

A ideia intuitiva de limite determina o valor para o qual uma função $f(x)$ tende quando $x \to x_0$. Em alguns casos, o limite pode não existir, por exemplo:

- Exemplo 1:
  Justifique porque o limite $\lim_{x \to 0} f(x)$ não existe.

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x < 0 \\ 1 & \text{se } x \geq 0 \end{cases}$$

- Exemplo 2:
  Seja $g(x) = 1/x$, justifique porque, segundo a definição formal, o limite $\lim_{x \to 0} g(x)$ não existe.

Quando o limite não existe?

A ideia intuitiva de limite determina o valor para o qual uma função $f(x)$ tende quando $x \to x_0$. Em alguns casos, o limite pode não existir, por exemplo:

- Exemplo 1:
  Justifique porque o limite $\lim_{x \to 0} f(x)$ não existe.
  $$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x < 0 \\ 1 & \text{se } x \geq 0 \end{cases}$$
- Exemplo 2:
  Seja $g(x) = 1/x$, justifique porque, segundo a definição formal, o limite $\lim_{x \to 0} g(x)$ não existe.
- Exemplo 3:
  Seja $h(x) = \text{sen}(1/x)$, justifique porque o limite $\lim_{x \to 0} h(x)$ não existe.

Ferramenta: Divisão de Polinômios

Funções racionais do tipo $f(x) = p(x)/q(x)$ são definidas em todos os reais, exceto nos pontos x que são raízes do polinômio $q(x)$. Para calcular os limites nesses pontos é preciso fatorar os polinômios para remover as indeterminações.

- Exemplo: seja

$$f(x) = \frac{x^2 + 3x - 4}{x^2 - 3x + 2},$$

determine as raízes do polinômio no denominador e

Ferramenta: Divisão de Polinômios

Funções racionais do tipo $f(x) = p(x)/q(x)$ são definidas em todos os reais, exceto nos pontos x que são raízes do polinômio $q(x)$. Para calcular os limites nesses pontos é preciso fatorar os polinômios para remover as indeterminações.

- Exemplo: seja

$$f(x) = \frac{x^2 + 3x - 4}{x^2 - 3x + 2},$$

determine as raízes do polinômio no denominador e determine $\lim_{x \to 1} f(x)$ e $\lim_{x \to 2} f(x)$.

Ferramenta: Divisão de Polinômios

Funções racionais do tipo $f(x) = p(x)/q(x)$ são definidas em todos os reais, exceto nos pontos x que são raízes do polinômio $q(x)$. Para calcular os limites nesses pontos é preciso fatorar os polinômios para remover as indeterminações.

- Exemplo: seja

$$f(x) = \frac{x^2 + 3x - 4}{x^2 - 3x + 2},$$

determine as raízes do polinômio no denominador e determine $\lim_{x \to 1} f(x)$ e $\lim_{x \to 2} f(x)$.

Respostas: $\lim_{x \to 1} f(x) = -5$ e $\lim_{x \to 2} f(x) \nexists$

Leis do Limite

Sejam L, M, c e k números reais, $\lim_{x \to c} f(x) = L$ e $\lim_{x \to c} g(x) = M$. Temos as seguintes Leis dos Limites:

1. Limite da Soma: $\lim_{x \to c} [f(x) + g(x)] = L + M$
2. Limite da Diferença: $\lim_{x \to c} [f(x) - g(x)] = L - M$
3. Limite do Produto: $\lim_{x \to c} [f(x) \cdot g(x)] = L \cdot M$
4. Limite do Quociente: $\lim_{x \to c} \left[\frac{f(x)}{g(x)}\right] = \frac{L}{M}$ aqui $M \neq 0$
5. Multiplicação por constante: $\lim_{x \to c} [k \cdot f(x)] = k \cdot L$
6. Limite da potência: $\lim_{x \to c} [f(x)]^{r/s} = L^{r/s}$
   aqui r e s são inteiros e $L^{r/s}$ deve ser um número real.

Exemplo de cálculo de limites

Determine os limite abaixo:

- Exemplo:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{x^2 + 100} - 10}{x^2}.$$

Teorema do Confronto ou Sanduíche

Sejam as funções $f(x)$, $g(x)$ e $h(x)$ tais que

$$g(x) \leq f(x) \leq h(x)$$

em um intervalo aberto em torno de c, exceto possivelmente em $x = c$. Se

$$\lim_{x \to c} [g(x)] = \lim_{x \to c} [h(x)] = L\,,$$

então

$$\lim_{x \to c} [f(x)] = L\,.$$

Teorema do Confronto - Exemplo

Suponha que uma função genérica $u(x)$ apresenta a seguinte propriedade para todo x, exceto em $x = 0$,

$$1 - x^2 \leq u(x) \leq 1 + x^2 \, .$$

Usando o teorema do confronto, determine

$$\lim_{x \to 0} u(x) \, .$$

Teorema do Confronto - Exemplo

Suponha que uma função genérica $u(x)$ apresenta a seguinte propriedade para todo x, exceto em $x = 0$,

$$1 - x^2 \leq u(x) \leq 1 + x^2 \, .$$

Usando o teorema do confronto, determine

$$\lim_{x \to 0} u(x) \; .$$

Como

$$\lim_{x \to 0} \left(1 - x^2\right) = \lim_{x \to 0} \left(1 + x^2\right) = 1 \, ,$$

então o Teorema do Confronto estabelece que:

$$\lim_{x \to 0} u(x) = 1 \, .$$

Limite Fundamental: $\lim_{x\to 0} \operatorname{sen}(x)/x$

Para determinar esse limite, podemos utilizar o teorema do confronto. A partir de uma construção geométrica, é possível mostrar que

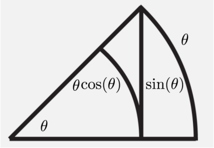
$$1 > \frac{\operatorname{sen}(x)}{x} > \cos(x) .$$

Dado que

$$\lim_{x\to 0} 1 = \lim_{x\to 0} \cos(x) = 1 ,$$

segue que

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}(x)}{x} = 1 .$$



$\lim_{x \to 0} \operatorname{sen}(x)/x$ – Exemplos

Determine os seguintes limites:

- Exemplo 1:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen}(6x)}{3x}$$

$\lim_{x \to 0} \operatorname{sen}(x)/x$ – Exemplos

Determine os seguintes limites:

- Exemplo 1:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen}(6x)}{3x}$$

- Exemplo 2:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen}(2x)}{\operatorname{sen}(5x)}$$

Limites Laterais

Até aqui, tratamos apenas dos limites bilaterais (ou apenas limites). Vamos agora tratar dos limites laterais.

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = L \ \text{ é o Limite Bilateral},$$

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = L_D \ \text{ é o Limite Lateral à Direita},$$

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = L_E \ \text{ é o Limite Lateral à Esquerda}.$$

Definição de Limite Lateral

Seja $f(x)$ definida em um aberto em torno de x_0, exceto talvez em x_0.
O limite lateral à direita

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = L\,,$$

existe se para qualquer $\varepsilon > 0$ existir um $\delta > 0$ tal que

$$x_0 < x < x_0 + \delta \;\Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon\,.$$

Definição de Limite Lateral

Seja $f(x)$ definida em um aberto em torno de x_0, exceto talvez em x_0.
O limite lateral à direita

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = L\,,$$

existe se para qualquer $\varepsilon > 0$ existir um $\delta > 0$ tal que

$$x_0 < x < x_0 + \delta \;\Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon\,.$$

O limite lateral à esquerda

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = L$$

existe se para qualquer$\varepsilon > 0$ existir um $\delta > 0$ tal que

$$x_0 - \delta < x < x_0 \;\Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon\,.$$

Limites Laterais

Teorema de Existência do Limite:
Seja $f(x)$ uma função real, x_0 um número real, a e b números tais que os intervalos

$$(a, x_0) \text{ e } (x_0, b)$$

estejam contidos em D_f. Então

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = \lim_{x \to x_0^-} f(x) = L \Leftrightarrow \lim_{x \to x_0} f(x) = L$$

Limites Laterais – Exemplo

Seja a função $f(x) = \sqrt{4 - x^2}$. Determine seu domínio e imagem e faça seu gráfico. Determine também, caso existam, os seguintes limites:

$$\lim_{x \to 2^+} f(x) \qquad \lim_{x \to 2^-} f(x)$$
$$\lim_{x \to -2^+} f(x) \qquad \lim_{x \to -2^-} f(x)$$
$$\lim_{x \to 0^+} f(x) \qquad \lim_{x \to 0^-} f(x)$$

O que se pode dizer sobre os limites de $f(x)$ nos pontos 2, -2 e 0?

Limites no Infinito

O limite

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = L,$$

existe se o número real L satisfaz a seguinte condição:

$$\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, M > 0 \text{ tal que } x > M \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon.$$

Limites no Infinito

O limite

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = L\,,$$

existe se o número real L satisfaz a seguinte condição:

$$\forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ M > 0\ \text{ tal que } x > M \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon\,.$$

O limite

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = L\,,$$

existe se o número real L satisfaz a seguinte condição:

$$\forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ N > 0\ \text{ tal que } x < -N \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon\,.$$

Limites no Infinito – Exemplos

Determine os limites abaixo:

- Exemplo 1

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)$$

Limites no Infinito – Exemplos

Determine os limites abaixo:

- Exemplo 1

$$\lim_{x \to \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)$$

- Exemplo 2

$$\lim_{x \to \infty} \frac{-2x^2 + x + 2}{x^2 + 2x - 1}$$

Limites no Infinito – Exemplos

Determine os limites abaixo:

- Exemplo 1

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)$$

- Exemplo 2

$$\lim_{x\to\infty}\frac{-2x^2+x+2}{x^2+2x-1}$$

- Exemplo 3

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2-4x+2}{2x^3-1}$$

Limites no Infinito – Exemplos

- Exemplo 4

$$\lim_{h \to -\infty} \frac{2 - h + \operatorname{sen}(h)}{h + \cos(h)}$$

Limites Infinitos

Quando uma função cresce indefinidamente quando $x \to x_0$ dizemos que seu valor tende a infinito. Podemos representar tal comportamento com o seguinte limite:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \infty \,.$$

Limites Infinitos

Quando uma função cresce indefinidamente quando $x \to x_0$ dizemos que seu valor tende a infinito. Podemos representar tal comportamento com o seguinte limite:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \infty .$$

Alguns exemplos básicos são:

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x} = \infty$$

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$$

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x^2} = \lim_{x \to 0^-} \frac{1}{x^2} = \infty$$

Limites Infinitos - Exemplos

Seja a função

$$f(x) = \frac{x}{x^2 - 1},$$

determine

$$\lim_{x \to 1^+} f(x) \quad \text{e} \quad \lim_{x \to 1^-} f(x)$$

Limites Infinitos - Exemplos

Seja a função

$$f(x) = \frac{x}{x^2 - 1},$$

determine

$$\lim_{x \to 1^+} f(x) \quad \text{e} \quad \lim_{x \to 1^-} f(x)$$

Respostas:

$$\lim_{x \to 1^+} f(x) = +\infty \quad \text{e} \quad \lim_{x \to 1^-} f(x) = -\infty$$

Assíntotas

A reta $y = b$ é uma assíntota horizontal da função $f(x)$ se:

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = b \text{ ou } \lim_{x \to -\infty} f(x) = b$$

Assíntotas

A reta $y = b$ é uma assíntota horizontal da função $f(x)$ se:

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = b \;\text{ ou }\; \lim_{x \to -\infty} f(x) = b$$

A reta $x = a$ é uma assíntota vertical da função $f(x)$ se:

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = \pm\infty \;\text{ ou }\; \lim_{x \to a^-} f(x) = \pm\infty$$

Assíntotas – Exemplo

Para as funções dadas abaixo, faça o gráfico, determiando suas assíntotas e os pontos onde a função cruza os eixos x e y:

- Exemplo

$$f(x) = \frac{x+3}{x+2}$$

Continuidade

Seja uma função $f(x)$ e $c \in D_f$. Se o ponto c é um ponto interior de D_f, dizemos que a função $f(x)$ é contínua no ponto c quando:

$$\lim_{x \to c} f(x) = f(c) \ .$$

Continuidade

Seja uma função $f(x)$ e $c \in D_f$. Se o ponto c é um ponto interior de D_f, dizemos que a função $f(x)$ é contínua no ponto c quando:

$$\lim_{x \to c} f(x) = f(c) .$$

Se o ponto c é um ponto na extreminadade de D_f, dizemos que a função $f(x)$ é contínua no ponto c quando:

$$\lim_{x \to c^+} f(x) = f(c) \quad \text{ou} \quad \lim_{x \to c^-} f(x) = f(c) .$$

Neste primeiro caso, a função é dita contínua à direita de c e no segundo é dita contínua à esquerda de c.

Continuidade – Exemplo

- Exemplo
  Seja a função

$$f(x) = \begin{cases} -2 & \text{se } -2 < x < -1 \\ -x^2 + x & \text{se } -1 < x < 0 \\ x & \text{se } 0 \leq x < 1 \\ \sqrt{x} + 1 & \text{se } x \geq 1 \end{cases}$$

  determine seu domínio e imagem e faça seu gráfico. Essa função é contínua nos pontos -1, 0 e 1?

Noção Intuitiva de Derivada

A noção intuitiva de derivada aparece, por exemplo, se quisermos determinar o ângulo α que a reta tangente a uma função $f(x)$ em um ponto $x_1 \in D_f$ faz com a horizontal. A reta secante que passa por $(x_1, f(x_1))$ e $(x_2, f(x_2))$ tem:

$$\operatorname{tg}(\alpha) = \frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}.$$

Noção Intuitiva de Derivada

A noção intuitiva de derivada aparece, por exemplo, se quisermos determinar o ângulo α que a reta tangente a uma função $f(x)$ em um ponto $x_1 \in D_f$ faz com a horizontal. A reta secante que passa por $(x_1, f(x_1))$ e $(x_2, f(x_2))$ tem:

$$\operatorname{tg}(\alpha) = \frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}.$$

Tomando $x_2 = x_1 + \Delta x$, e fazendo Δx tender a zero, teremos α da reta tangente em x_1 dada por:

$$\operatorname{tg}(\alpha) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{\Delta x}.$$

Noção Intuitiva de Derivada

A noção intuitiva de derivada aparece, por exemplo, se quisermos determinar o ângulo α que a reta tangente a uma função $f(x)$ em um ponto $x_1 \in D_f$ faz com a horizontal. A reta secante que passa por $(x_1, f(x_1))$ e $(x_2, f(x_2))$ tem:

$$\operatorname{tg}(\alpha) = \frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}.$$

Tomando $x_2 = x_1 + \Delta x$, e fazendo Δx tender a zero, teremos α da reta tangente em x_1 dada por:

$$\operatorname{tg}(\alpha) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{\Delta x}.$$

Generalizando para qualquer $x \in D_f$, definimos a derivada de uma função $f(x)$ por

$$\frac{df(x)}{dx} = f' = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}.$$

Noção Intuitiva de Derivada - Exemplos

- Exemplo 1:
  Determine o ângulo que reta $f(x) = 2 + x$ faz com a horizontal.

Noção Intuitiva de Derivada - Exemplos

- Exemplo 1:
  Determine o ângulo que reta $f(x) = 2 + x$ faz com a horizontal.
- Exemplo 2:
  Determine o ângulo que reta tangente da função $f(x) = x^2 + 2x$ no ponto $x = -1$ faz com a horizontal.

Noção Intuitiva de Derivada

Seja a posição de uma partícula dada pela função:

$$x(t) = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a_0 t^2 \,.$$

Tomando o seguinte limite,

$$\frac{dx}{dt} = x' = v(t) = \lim_{h \to 0} \frac{x(t+h) - x(t)}{h} \,,$$

temos a velocidade instantânea da partícula:

$$v(t) = v_0 + a_0 t \,.$$

Noção Intuitiva de Derivada

Seja a posição de uma partícula dada pela função:

$$x(t) = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a_0 t^2 .$$

Tomando o seguinte limite,

$$\frac{dx}{dt} = x' = v(t) = \lim_{h \to 0} \frac{x(t+h) - x(t)}{h} ,$$

temos a velocidade instantânea da partícula:

$$v(t) = v_0 + a_0 t .$$

De forma análoga, podemos definir a aceleração instantânea

$$\frac{dv}{dt} = \frac{d^2 x}{dt^2} = a(t) = \lim_{h \to 0} \frac{v(t+h) - v(t)}{h} = a_0$$

Quando a derivada não existe?

A derivada de uma função é definida em função de um limite, portanto se tal limite não existir em algum ponto do domínio da função dizemos que a função não é derivável.

Quando a derivada não existe?

A derivada de uma função é definida em função de um limite, portanto se tal limite não existir em algum ponto do domínio da função dizemos que a função não é derivável.

- Exemplo:
  Seja $f(x) = |x-1|$, mostre porque em $x = 1$

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \nexists .$$

Quando a derivada não existe?

A derivada de uma função é definida em função de um limite, portanto se tal limite não existir em algum ponto do domínio da função dizemos que a função não é derivável.

- Exemplo:
  Seja $f(x) = |x-1|$, mostre porque em $x = 1$

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \nexists .$$

Note que $f(x)$ é contínua, mas não é derivável.

Continuidade de Funções Deriváveis

Vimos que uma função contínua não é necessariamente derivável. Contudo, pode-se provar que

Teorema

Uma função derivável é contínua.

Regras de derivação

Sejam f, g e h funções deriváveis e c uma constante real, valem as seguintes regras de derivação:

1. Produto de função por constante: $f(x) = c \cdot g(x)$,
$$f'(x) = c \cdot g'(x)$$
2. Derivada da soma: $f = g + h$,
$$f' = g' + h'$$
3. Derivada do produto: $f = g \cdot h$
$$f' = g' \cdot h + g \cdot h'$$
4. Derivada do quociente: $f = g/h$
$$f' = \frac{g' \cdot h - g \cdot h'}{h^2}$$

Regras de derivação de funções

1. Função Constante: $f(x) = c$,

$$f'(x) = 0$$

2. Função Potência: $f(x) = x^n$, com $n \neq 0$ e racional

$$f'(x) = nx^{n-1}$$

3. Função Polinomial: $f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n$, com $n \neq 0$ e natural

Regras de derivação de funções

1. Função Constante: $f\left(x\right)=c$,
$$f'\left(x\right)=0$$
2. Função Potência: $f\left(x\right)=x^{n}$, com $n\neq 0$ e racional
$$f'\left(x\right)=nx^{n-1}$$
3. Função Polinomial: $f\left(x\right)=a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots+a_nx^n$, com $n\neq 0$ e natural
$$f'\left(x\right)=a_1+2a_2x+3a_3x^2+\ldots+na_nx^{n-1}$$

Exemplos

Determine as derivadas das funções abaixo

- Exemplo 1:

$$f(x) = x^3 + 2x - 1$$

Exemplos

Determine as derivadas das funções abaixo

- Exemplo 1:

$$f(x) = x^3 + 2x - 1$$

- Exemplo 2:

$$f(x) = \left(3x^4 + 2x^2\right) x^{-2}$$

Exemplos

Determine as derivadas das funções abaixo

- Exemplo 1:

$$f(x) = x^3 + 2x - 1$$

- Exemplo 2:

$$f(x) = \left(3x^4 + 2x^2\right) x^{-2}$$

- Exemplo 3:

$$f(x) = \frac{x^3 - 2x^2}{3x - 8}$$

Exemplos

Determine as derivadas das funções abaixo

- Exemplo 1:

$$f(x) = x^3 + 2x - 1$$

- Exemplo 2:

$$f(x) = \left(3x^4 + 2x^2\right) x^{-2}$$

- Exemplo 3:

$$f(x) = \frac{x^3 - 2x^2}{3x - 8}$$

Essas funções não são deriváveis em algum ponto, se sim onde?

Regra da Cadeia

Sejam $y = g(u)$ e $u = f(x)$ funções deriváveis. A Regra da Cadeia estabelece que

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}.$$

Note que a função $y = g(u) = g(f(x))$ é uma função composta de g com f.

Regra da Cadeia

Sejam $y = g(u)$ e $u = f(x)$ funções deriváveis. A Regra da Cadeia estabelece que

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}.$$

Note que a função $y = g(u) = g(f(x))$ é uma função composta de g com f.

A Regra da Cadeia pode ser demonstrada avaliando o seguinte limite:

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{h \to 0} \frac{g(f(x+h)) - g(f(x))}{h}$$

Regra da Cadeia – Exemplos

Usando a Regra da Cadeia determine a derivada das seguintes funções

- Exemplo 1:

$$f(x) = \left(x^3 + 2x - 1\right)^3$$

Regra da Cadeia – Exemplos

Usando a Regra da Cadeia determine a derivada das seguintes funções

- Exemplo 1:

$$f(x) = \left(x^3 + 2x - 1\right)^3$$

- Exemplo 2:

$$f(x) = \frac{g(x)}{h(x)}$$

Regra da Cadeia – Exemplos

Usando a Regra da Cadeia determine a derivada das seguintes funções

- Exemplo 1:

$$f(x) = \left(x^3 + 2x - 1\right)^3$$

- Exemplo 2:

$$f(x) = \frac{g(x)}{h(x)}$$

- Exemplo 3:

$$f(x) = \frac{3x + 2}{2x + 1}$$

Regra da Cadeia – Exemplos

- Exemplo 4:

$$f\left(x\right)=\left(\frac{3x+2}{2x+1}\right)^{5}$$

Regra da Cadeia – Exemplos

- Exemplo 4:

$$f\left(x\right)=\left(\frac{3x+2}{2x+1}\right)^{5}$$

- Exemplo 5:

$$f\left(x\right)=5\sqrt{x^{2}+3}$$

Regra da Cadeia – Exemplos

- Exemplo 4:

$$f(x) = \left(\frac{3x+2}{2x+1}\right)^5$$

- Exemplo 5:

$$f(x) = 5\sqrt{x^2+3}$$

- Exemplo 6:

$$f(x) = \frac{1}{(1-x^2)^{3/2}}$$

Derivada da função exponencial

A derivada da função $f(x) = a^x$, com $a > 0$ e $a \neq 1$ é dada pelo seguinte limite

$$\frac{d}{dx}\left(a^x\right) = \lim_{h \to 0} \frac{a^{x+h} - a^x}{h}.$$

Derivada da função exponencial

A derivada da função $f(x) = a^x$, com $a > 0$ e $a \neq 1$ é dada pelo seguinte limite

$$\frac{d}{dx}\left(a^x\right) = \lim_{h \to 0} \frac{a^{x+h} - a^x}{h} .$$

Usando o seguinte limite fundamental

$$\lim_{h \to 0} \frac{a^h - 1}{h} = \ln(a) ,$$

temos que

$$\frac{d}{dx}\left(a^x\right) = a^x \ln(a) .$$

Derivada da função logarítmica

A derivada da função $f(x) = \log_a x$ com $a > 0$ e $a \neq 1$ é dada pelo seguinte limite

$$\frac{d}{dx}(\log_a x) = \lim_{h\to 0} \frac{\log_a(x+h) - \log_a x}{h}.$$

Usando o seguinte limite fundamental

$$\lim_{u\to\pm\infty}\left(1+\frac{1}{u}\right)^u = e$$

podemos mostrar que

$$\frac{d}{dx}(\log_a x) = \frac{1}{x}\log_a e$$

F. Exp. e Log. – Exemplos básicos

Determine as derivadas das seguinte funções:

- Exemplo 1:

$$f(x) = 2^x \quad \text{e} \quad g(x) = \log_2 x$$

F. Exp. e Log. – Exemplos básicos

Determine as derivadas das seguinte funções:

- Exemplo 1:

$$f(x) = 2^x \quad \text{e} \quad g(x) = \log_2 x$$

- Exemplo 2:

$$f(x) = e^x \quad \text{e} \quad g(x) = \ln x$$

F. Exp. e Log. – Exemplos

Determine as derivadas das seguinte funções:

- Exemplo 1:

$$f(x) = 3^{2x^2+3x-1}$$

F. Exp. e Log. – Exemplos

Determine as derivadas das seguinte funções:

- Exemplo 1:

$$f(x) = 3^{2x^2+3x-1}$$

- Exemplo 2:

$$f(x) = \exp\left(\frac{x+1}{x-1}\right)$$

F. Exp. e Log. – Exemplos

Determine as derivadas das seguinte funções:

- Exemplo 1:

$$f(x) = 3^{2x^2+3x-1}$$

- Exemplo 2:

$$f(x) = \exp\left(\frac{x+1}{x-1}\right)$$

- Exemplo 3:

$$f(x) = \log_2\left(3x^2+7x-1\right)$$

Derivada da função seno

A derivada da função $\operatorname{sen}(x)$ é dada por:

$$\frac{d}{dx}(\operatorname{sen} x) = \lim_{h \to 0} \frac{\operatorname{sen}(x+h) - \operatorname{sen}(x)}{h}.$$

Usando o seguinte limite fundamental

$$\lim_{u \to 0} \frac{\operatorname{sen}(u)}{u} = 1,$$

podemos mostrar que

$$\frac{d}{dx}(\operatorname{sen} x) = \cos x$$

Derivada da função cosseno

A derivada da função $\cos(x)$ é dada por:

$$\frac{d}{dx}(\cos x) = \lim_{h \to 0} \frac{\cos(x+h) - \cos(x)}{h}.$$

Usando o seguinte limite fundamental

$$\lim_{u \to 0} \frac{\operatorname{sen}(u)}{u} = 1,$$

podemos mostrar que

$$\frac{d}{dx}(\cos x) = -\operatorname{sen} x.$$

Derivada das demais funções trigonométricas

Como as demais funções trigonométricas são definidas em função das funções seno e cosseno, basta usarmos as regras de derivação para determinar suas derivadas. Por exemplo:

$$\operatorname{tg}(x) = \frac{\operatorname{sen}(x)}{\cos(x)},$$

então, usando a regra do quociente temos

$$\frac{d}{dx}\operatorname{tg}(x) = \frac{\cos^2(x) + \operatorname{sen}^2(x)}{\cos^2(x)} = \frac{1}{\cos^2(x)},$$

$$\frac{d}{dx}\operatorname{tg}(x) = \sec^2(x).$$

Derivada das demais funções trigonométricas

De forma análoga podemos determinar:

$$\frac{d}{dx}\sec(x) =$$

$$\frac{d}{dx}\text{cotg}(x) =$$

$$\frac{d}{dx}\text{cosec}(x) =$$

Derivada das demais funções trigonométricas

De forma análoga podemos determinar:

$$\frac{d}{dx}\sec(x) = \sec(x) \cdot \mathrm{tg}(x)$$

$$\frac{d}{dx}\mathrm{cotg}(x) = -\mathrm{cosec}^2(x)$$

$$\frac{d}{dx}\mathrm{cosec}(x) = -\mathrm{cosec}(x) \cdot \mathrm{cotg}(x)$$

Derivada das funções trigonométricas – Exemplos

Determine a derivadas das seguintes funções:

- Exemplo 1:

$$f(x) = \operatorname{sen}\left(x^3 + x^2\right)$$

Derivada das funções trigonométricas – Exemplos

Determine a derivadas das seguintes funções:

- Exemplo 1:

$$f(x) = \operatorname{sen}\left(x^3 + x^2\right)$$

- Exemplo 2:

$$f(x) = \cos\left(\sqrt{x^3 + 3}\right)$$

Derivada das funções trigonométricas – Exemplos

Determine a derivadas das seguintes funções:

- Exemplo 1:

$$f(x) = \operatorname{sen}\left(x^3 + x^2\right)$$

- Exemplo 2:

$$f(x) = \cos\left(\sqrt{x^3 + 3}\right)$$

- Exemplo 3:

$$f(x) = \sec(x) \cdot \operatorname{sen}\left(x^2\right)$$

Derivada de funções hiperbólicas

As funções seno e cosseno hiperbólicas são definidas por:

$$\operatorname{senh}(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

e

$$\cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}.$$

Derivada de funções hiperbólicas

As funções seno e cosseno hiperbólicas são definidas por:

$$\operatorname{senh}(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

e

$$\cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}.$$

Dadas essas definições, determine

$$\frac{d}{dx}\operatorname{senh}(x) \quad \text{e} \quad \frac{d}{dx}\cosh(x).$$

Derivada de funções hiperbólicas

As funções seno e cosseno hiperbólicas são definidas por:

$$\operatorname{senh}(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

e

$$\cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}.$$

Dadas essas definições, determine

$$\frac{d}{dx}\operatorname{senh}(x) \quad \text{e} \quad \frac{d}{dx}\cosh(x).$$

Respostas:

$$\frac{d}{dx}\operatorname{senh}(x) = \cosh(x) \quad \text{e} \quad \frac{d}{dx}\cosh(x) = \operatorname{senh}(x)$$

Derivada de Função Inversa

Seja $u = f(x)$ e $v = f^{-1}(x)$. Sabemos que

$$u(v) = f\left(f^{-1}(x)\right) = x\,,$$

então

$$\frac{du}{dx} = \frac{du}{dv}\frac{dv}{dx} = 1\,.$$

Como isso podemos podemos determinar a derivada da função inversa v por:

$$\frac{dv}{dx} = \left(\frac{du}{dv}\right)^{-1}\,.$$

Derivada de Função Inversa

Seja $u = f(x)$ e $v = f^{-1}(x)$. Sabemos que

$$u(v) = f\left(f^{-1}(x)\right) = x\,,$$

então

$$\frac{du}{dx} = \frac{du}{dv}\frac{dv}{dx} = 1\,.$$

Como isso podemos podemos determinar a derivada da função inversa v por:

$$\frac{dv}{dx} = \left(\frac{du}{dv}\right)^{-1}\,.$$

Exemplo:
Seja $u = x^2$, determine sua inversa e a derivada desta.

Derivada das funções trigonométricas inversas

Tomando $u = \text{sen}\,(x)$, com $D_u = [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ temos $I_u = [-1, 1]$, e podemos definir sua inversa $v = u^{-1} = \text{arcsen}\,(x)$. Então a derivada de v é dada por:

Derivada das funções trigonométricas inversas

Tomando $u = \text{sen}\,(x)$, com $D_u = [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ temos $I_u = [-1, 1]$, e podemos definir sua inversa $v = u^{-1} = \text{arcsen}\,(x)$. Então a derivada de v é dada por:

$$\frac{dv}{dx} = \left(\frac{d\text{sen}\,(v)}{dv}\right)^{-1} = \frac{1}{\cos\,(v)} = \frac{1}{\sqrt{1 - \text{sen}^2\,(v)}},$$

Derivada das funções trigonométricas inversas

Tomando $u = \operatorname{sen}(x)$, com $D_u = [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ temos $I_u = [-1, 1]$, e podemos definir sua inversa $v = u^{-1} = \operatorname{arcsen}(x)$. Então a derivada de v é dada por:

$$\frac{dv}{dx} = \left(\frac{d\operatorname{sen}(v)}{dv}\right)^{-1} = \frac{1}{\cos(v)} = \frac{1}{\sqrt{1 - \operatorname{sen}^2(v)}},$$

note que $\operatorname{sen}(v) = \operatorname{sen}(\operatorname{arcsen}(x)) = x$, portanto

$$\frac{d}{dx}\operatorname{arcsen}(x) = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

Derivada das funções trigonométricas inversas

De forma análoga podemos determinar

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}\text{arcsen}\,(x) &= \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad |x|<1\\
\frac{d}{dx}\text{arccos}\,(x) &= -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad |x|<1\\
\frac{d}{dx}\text{arctg}\,(x) &= \frac{1}{1+x^2}\\
\frac{d}{dx}\text{arccotg}\,(x) &= -\frac{1}{1+x^2}\\
\frac{d}{dx}\text{arcsec}\,(x) &= \frac{1}{|x|\sqrt{x^2-1}}, \quad |x|>1\\
\frac{d}{dx}\text{arccosec}\,(x) &= -\frac{1}{|x|\sqrt{x^2-1}}, \quad |x|>1
\end{aligned}$$

Derivadas de ordem superior

Com frequência é preciso saber a segunda ou terceira derivada de uma função. Por exemplo, para determinar a força à qual que está sujeita uma partícula cuja posição em função do tempo é:

$$x(t) = \frac{x_0}{2} + v_0 (t - t_0) + \frac{x_0}{2} e^{-(t-t_0)/t_0}, \quad \text{com } t \geq t_0 \,.$$

Da Segunda Lei de Newton (em uma dimensão), sabemos que

$$F = ma = m\frac{dv}{dt} = m\frac{d^2x}{dt^2},$$

portanto, calculando a derivada segunda de $x(t)$ podemos determinar a força.

Derivadas de ordem superior

Com frequência é preciso saber a segunda ou terceira derivada de uma função. Por exemplo, para determinar a força à qual que está sujeita uma partícula cuja posição em função do tempo é:

$$x(t) = \frac{x_0}{2} + v_0(t - t_0) + \frac{x_0}{2} e^{-(t-t_0)/t_0}, \quad \text{com } t \geq t_0 .$$

Da Segunda Lei de Newton (em uma dimensão), sabemos que

$$F = ma = m\frac{dv}{dt} = m\frac{d^2x}{dt^2},$$

portanto, calculando a derivada segunda de $x(t)$ podemos determinar a força.

Nesse caso temos

$$F = \frac{m}{2(t_0)^2} x_0 e^{-(t-t_0)/t_0} .$$

Derivação Implícita

Seja uma função $F(x, y) = 0$, diz-se que uma função $y = f(x)$ é definida implicitamente por F se

$$F(x, f(x)) = 0 .$$

Derivação Implícita

Seja uma função $F(x,y)=0$, diz-se que uma função $y=f(x)$ é definida implicitamente por F se

$$F(x,f(x))=0\,.$$

- Exemplo 1:
  Seja $F(x,y)=x^2+\frac{y}{2}-1=0$, verifique se $y=2(1-x^2)$ é definida implicitamente por F. Se sim, determine dy/dx.

Derivação Implícita

Seja uma função $F(x, y) = 0$, diz-se que uma função $y = f(x)$ é definida implicitamente por F se

$$F(x, f(x)) = 0\,.$$

- Exemplo 1:
  Seja $F(x, y) = x^2 + \frac{y}{2} - 1 = 0$, verifique se $y = 2(1 - x^2)$ é definida implicitamente por F. Se sim, determine dy/dx.
- Exemplo 2:
  Seja $F(x, y) = y^2 + x^2 - 4 = 0$, com $y \geq 0$. Determine dy/dx implicitamente e também explicitamente.

Diferencial

Seja uma função $f = f(x)$, seu diferencial é dado por

$$df = f' dx \, .$$

Um exemplo fisicamente interessante de diferencial está relacionado com a massa contida numa esfera de densidade constante ρ_0. Neste caso, a massa contida até um raio r é dada por:

$$M = \frac{4\pi}{3} r^3 \rho_0 \, .$$

Então o diferencial tem a seguinte expressão:

$$dM = 4\pi \rho_0 r^2 dr \, .$$

Conhecendo esta expressão, podemos generalizar para o caso de uma densidade dependente do raio:

$$dM = 4\pi \rho(r) r^2 dr \, .$$