Cálculo 1 – ECT2103

Slides de apoio sobre Integrais Indefinidas

Prof. Ronaldo Carlotto Batista

13 de setembro de 2021

AVISO IMPORTANTE

Estes slides foram criados como material de apoio às aulas e não devem ser utilizados como único material didático. O conteúdo apresentado aqui está no capítulo 6 do livro Cálculo A, Flemming & Gonçalves, 6ª Ed (livro texto); ou ainda, alternativamente, no capítulo 5 do livro Cálculo, George B. Thomas, Vol. 1 , 11º Ed.

Primitiva

Definição

Primitiva

Uma função $F = F(x)$ é dita primitiva de outra função $f = f(x)$ se

$$\frac{dF}{dx} = f$$

Primitiva

Definição

Primitiva

Uma função $F = F(x)$ é dita primitiva de outra função $f = f(x)$ se

$$\frac{dF}{dx} = f$$

Nos exemplos abaixo, encontre as primitivas das funções.

- Exemplo 1:

$$f(x) = x^2$$

Primitiva

Definição

Primitiva

Uma função $F = F(x)$ é dita primitiva de outra função $f = f(x)$ se

$$\frac{dF}{dx} = f$$

Nos exemplos abaixo, encontre as primitivas das funções.

- Exemplo 1:

$$f(x) = x^2$$

- Exemplo 2:

$$f(x) = \cos(2x)$$

Primitiva

- Exemplo 3:

$$f(x) = \frac{2}{x}$$

Primitiva

- Exemplo 3:

$$f(x) = \frac{2}{x}$$

- Exemplo 4:

$$f(x) = 2xe^{x^2}$$

Primitiva

- Exemplo 3:

$$f(x) = \frac{2}{x}$$

- Exemplo 4:

$$f(x) = 2xe^{x^2}$$

Note que qualquer função $G = F + c$, onde c é uma constante, também é uma primitiva de f.

Integral Indefinida

Definição

Integral Indefinida

Seja uma função $f = f(x)$ e suas primitivas $F(x) + c$, a integral indefinida de f em relação a x é dada por

$$\int f(x)\,dx = F(x) + c$$

Integral Indefinida

Definição

Integral Indefinida

Seja uma função $f = f(x)$ e suas primitivas $F(x) + c$, a integral indefinida de f em relação a x é dada por

$$\int f(x)\,dx = F(x) + c$$

Note que

$$\frac{d}{dx}(F(x) + c) = \frac{d}{dx}\int f(x)\,dx = f(x)$$

Propriedades da Integral Indefinida

Sejam f e g funções com primitivas e k uma constante, valem as seguintes propriedades da Integral Indefinida:

1. $$\int kf(x)\,dx = k\int f(x)\,dx$$

2. $$\int (f(x)+g(x))\,dx = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx$$

Integrais Imediatas

Algumas funções (para uma lista mais completa veja a tabela 6.1.10 do livro) que têm integrais imediatas são:

1. $$\int dx = x + c$$
2. $$\int x^a dx = \frac{x^{a+1}}{a+1} + c$$
3. $$\int e^x dx = e^x + c$$
4. $$\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + c$$

Integrais Imediatas

1. $$\int \cos(x)\, dx = \operatorname{sen}(x) + c$$

2. $$\int \operatorname{sen}(x)\, dx = -\cos(x) + c$$

3. $$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \operatorname{arcsen}(x) + c$$

4. $$\int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg}(x) + c$$

Integração por mudança de variável

Sejam $f = f(x)$ e sua primitiva $F = F(x)$, isto é,

$$\frac{dF}{dx} = f\,.$$

Consideremos agora $f = f(u)$, com $u = u(x)$. Da mesma forma, a primitiva $F(u)$ é dada por

$$\frac{dF}{du} = f\,.$$

Mas tomando

$$\frac{dF(u(x))}{dx} = \frac{dF}{du}\frac{du}{dx} = u'f\,,$$

vemos que $F = F(u)$ é uma primitiva da função $u'f$, portanto

$$\int f(u)\frac{du}{dx}dx = \int f(u)\,du = F(u) + c\,.$$

Integração por mudança de variável – Exemplos

Determine as integrais indefinidas abaixo:

- Exemplo 1:

$$\int \frac{2x}{x^2+1}dx$$

Integração por mudança de variável – Exemplos

Determine as integrais indefinidas abaixo:

- Exemplo 1:

$$\int \frac{2x}{x^2+1}dx$$

- Exemplo 2:

$$\int \mathrm{sen}^2 x \cos x dx$$

Integração por mudança de variável – Exemplos

Determine as integrais indefinidas abaixo:

- Exemplo 1:

$$\int \frac{2x}{x^2+1}dx$$

- Exemplo 2:

$$\int \text{sen}^2 x \cos x dx$$

- Exemplo 3:

$$\int \text{sen}\left(2x+8\right)dx$$

Integração por mudança de variável – Exemplos

- Exemplo 4:

$$\int \mathrm{tg} x dx$$

Integração por mudança de variável – Exemplos

- Exemplo 4:

$$\int \mathrm{tg} x dx$$

- Exemplo 5:

$$\int \frac{1}{(2x+8)^2} dx$$

Integração por mudança de variável – Exemplos

- Exemplo 4:

$$\int \text{tg} x dx$$

- Exemplo 5:

$$\int \frac{1}{(2x+8)^2} dx$$

- Exemplo 6:

$$\int x \exp\left(\frac{x^2}{3} - 1\right) dx$$

Integração por partes

Seja uma função $f = u \cdot v$, sabemos que

$$\frac{df}{dx} = \frac{d\left(u \cdot v\right)}{dx} = \frac{du}{dx}v + u\frac{dv}{dx}\,.$$

Então

$$\int \frac{df}{dx}dx = \int \frac{d\left(u \cdot v\right)}{dx}dx = \int d\left(u \cdot v\right) = u \cdot v\,,$$

por outro lado

$$\int \frac{df}{dx}dx = \int v\frac{du}{dx}dx + \int u\frac{dv}{dx}dx = \int vdu + \int udv\,,$$

potanto temos

$$\int udv = u \cdot v - \int vdu$$

Integração por partes

Note que o uso desta técnica requer:

1. Identificar a função u e, via derivação, determinar seu diferencial du,
2. Identificar o diferencial dv e, via integração, determinar a função v,
3. Computar a integral

$$\int v du\,.$$

Integração por partes – Exemplos

Determine as integrais abaixo fazendo integração por partes:

- Exemplo 1:

$$\int xe^{-2x}dx$$

Integração por partes – Exemplos

Determine as integrais abaixo fazendo integração por partes:

- Exemplo 1:

$$\int xe^{-2x}dx$$

- Exemplo 2:

$$\int \ln(x)\,dx$$

Integração por partes – Exemplos

Determine as integrais abaixo fazendo integração por partes:

- Exemplo 1:

$$\int xe^{-2x}dx$$

- Exemplo 2:

$$\int \ln(x)\, dx$$

- Exemplo 3:

$$\int x^2 \operatorname{sen} x dx$$

Aviso

Veremos apenas algumas técnicas de integração. No decorrer de sua vida acadêmica você vai se deparar com uma grande variedade de integrais, não sendo possível abordar tantas técnicas num curso de Cálculo 1. O capítulo 7 do livro-texto apresenta uma boa quantidade de técnicas e suas variações, o que poderá servir como um boa referência futura.

Potências inteiras de funções trigonométricas

Para determinar integrais do tipo

$$\int \operatorname{sen}^n x dx \quad \text{ou} \quad \int \cos^n x dx\,,$$

com n inteiro, as seguintes identidades trigonométricas serão úteis:

$$\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$$

$$\operatorname{sen}^2 x = \frac{1}{2} - \frac{\cos(2x)}{2}$$

$$\cos^2 x = \frac{1}{2} + \frac{\cos(2x)}{2}$$

Potências inteiras de funções trigonométricas

Vejemos dois exemplos onde n é ímpar:

- Exemplo 1:

$$\int \cos^5 x dx \, .$$

Potências inteiras de funções trigonométricas

Vejemos dois exemplos onde n é ímpar:

- Exemplo 1:

$$\int \cos^5 x dx \,.$$

- Exemplo 2:

$$\int \operatorname{sen}^3 x dx \,.$$

Potências inteiras de funções trigonométricas

E agora um exemplo onde n é par:

- Exemplo 3:

$$\int \operatorname{sen}^4 x dx \, .$$

Substituição trigonométrica

Integrais envolvendo raízes dos tipos abaixo são resolvidas medidante as seguintes trocas de variáveis.

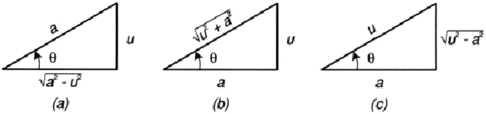

Figura 7.1

No caso (a)

$$u = a\text{sen}\theta\,.$$

No caso (b)

$$u = a\,\text{tg}\,(\theta)\ ,$$

No caso (c)

$$u = a\sec(\theta)\ .$$

Substituição trigonométrica

- Exemplo 1:

$$\int \sqrt{4 - x^2}dx \, .$$

Substituição trigonométrica

- Exemplo 1:

$$\int \sqrt{4 - x^2}dx\,.$$

- Exemplo 2:

$$\int \sqrt{9 + x^2}dx\,.$$

Decomposição em frações parciais

Frequentemente precisamos integrar uma função racional $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$,onde $p(x)$ e $q(x)$ são polinômios. Possíveis decomposições que facilitam a integração são:

$$\text{i)}\quad \frac{mx+n}{(x-\alpha)(x-\beta)} = \frac{A}{x-\alpha} + \frac{B}{x-\beta}$$

$$\text{ii)}\quad \frac{mx+n}{(x-\alpha)^2} = \frac{A}{(x-\alpha)} + \frac{B}{(x-\alpha)^2}$$

$$\text{iii)}\quad \frac{mx^2+nx+p}{(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)} = \frac{A}{(x-\alpha)} + \frac{B}{(x-\beta)} + \frac{C}{(x-\gamma)}$$

Decomposição em frações parciais

$$\text{iv)}\quad \frac{mx^2+nx+p}{(x-\alpha)(x-\beta)^2}=\frac{A}{(x-\alpha)}+\frac{B}{(x-\beta)}+\frac{C}{(x-\beta)^2}$$

$$\text{v)}\quad \frac{mx^2+nx+p}{(x-\alpha)\,q(x)}=\frac{A}{(x-\alpha)}+\frac{Bx+C}{q(x)},$$

onde $q(x)$ é um polinômio de segundo grau sem raízes reais.

Decomposição em frações parciais

- Exemplo 1.

$$\int \frac{1}{x^2 - 1} dx$$

Decomposição em frações parciais

- Exemplo 1.

$$\int \frac{1}{x^2 - 1} dx$$

- Exemplo 2.

$$\int \frac{x}{x^2 + x - 2} dx$$