# Cálculo 1 – ECT2103

## Aplicações de Derivadas

Prof. Ronaldo Carlotto Batista

13 de novembro de 2020

# AVISO IMPORTANTE

Estes slides foram criados como material de apoio às aulas e não devem ser utilizados como único material didático. O conteúdo apresentado aqui está no capítulo 5 do livro Cálculo A, Flemming & Gonçalves, 6ª Ed (livro texto); ou ainda, alternativamente, no capítulo 4 do livro Cálculo, George B. Thomas, Vol. 1 , 11º Ed.

# Funções Crescentes e Decrescentes

## Definição

Função Crescente

Uma função $f$ é dita crescente num intervalo $I \subseteq D_f$ se para quaisquer $x_1, x_2 \in I$ tais que $x_2 > x_1$ temos

$$f(x_2) \geq f(x_1)$$

# Funções Crescentes e Decrescentes

**Definição**

Função Crescente

Uma função $f$ é dita crescente num intervalo $I \subseteq D_f$ se para quaisquer $x_1$, $x_2 \in I$ tais que $x_2 > x_1$ temos

$$f(x_2) \geq f(x_1)$$

**Definição**

Função Decrescente

Uma função $f$ é dita crescente num intervalo $I \subseteq D_f$ se para quaisquer $x_1$, $x_2 \in I$ tais que $x_2 > x_1$ temos

$$f(x_2) \leq f(x_1)$$

# Funções Crescentes e Decrescentes

Seja uma função $f$ contínua em $[a, b]$ e derivável em $(a, b)$. Se

- $f'(x) > 0$ para todo $x \in (a, b)$, então $f$ é crescente em $[a, b]$
- $f'(x) < 0$ para todo $x \in (a, b)$, então $f$ é decrescente em $[a, b]$

# Funções Crescentes e Decrescentes – Exemplos

Determinar os intervalos onde as funções abaixo são crescentes ou descrescentes

- Exemplo 1:

$$f(x) = x^2 - x + 5$$

# Funções Crescentes e Decrescentes – Exemplos

Determinar os intervalos onde as funções abaixo são crescentes ou descrescentes

- Exemplo 1:

$$f(x) = x^2 - x + 5$$

- Exemplo 2:

$$f(x) = x^3 - 12x - 5$$

# Funções Crescentes e Decrescentes – Exemplos

Determinar os intervalos onde as funções abaixo são crescentes ou descrescentes

- Exemplo 1:

$$f(x) = x^2 - x + 5$$

- Exemplo 2:

$$f(x) = x^3 - 12x - 5$$

- Exemplo 3:

$$f(x) = \begin{cases} 2x^2 - 4 & \text{se } x \leq 1 \\ -x - 1 & \text{se } x > 1 \end{cases}$$

# Funções Crescentes e Decrescentes – Exemplo

Determinar os intervalos onde as funções abaixo são crescentes ou descrescentes

- Exemplo 4:

$$f(x) = x^3 - 3x + 1$$

# Máximos e Mínimos

## Definição

Máximo relativo

Uma função $f$ tem um máximo relativo no ponto $c$ se existir um aberto $I \subseteq D_f$, contendo $c$ tal que para todo $x \in I$

$$f(c) \geq f(x)$$

## Definição

Mínimo relativo

Uma função $f$ tem um mínimo relativo no ponto $c$ se existir um aberto $I \subseteq D_f$, contendo $c$ tal que para todo $x \in I$

$$f(c) \leq f(x)$$

# Máximos e Mínimos

**Definição**

Máximo absoluto

Uma função $f$ tem um máximo absoluto no ponto $c$ se para qualquer $x \in D_f$

$$f(c) \geq f(x)$$

**Definição**

Mínimo absoluto

Uma função $f$ tem um mínimo absoluto no ponto $c$ se para qualquer $x \in D_f$

$$f(c) \leq f(x)$$

# Máximos e Mínimos

**Definição**

Máximo absoluto

Uma função $f$ tem um máximo absoluto no ponto $c$ se para qualquer $x \in D_f$

$$f(c) \geq f(x)$$

**Definição**

Mínimo absoluto

Uma função $f$ tem um mínimo absoluto no ponto $c$ se para qualquer $x \in D_f$

$$f(c) \leq f(x)$$

Seja uma função $f$, cujo domínio $D_f = [a, b]$, então $f$ assume máximo e mínimo absoluto em $[a, b]$.

# Máximos e Mínimos

Se $f(c)$ é um extremo relativo (máximo ou mínimo relativo) e $f'(c)$ $\exists$ então

$$f'(c) = 0\,.$$

Note que $f'(c) = 0$ uma condição necessária, mas não suficiente, para que $f(c)$ seja um extremo relativo.

# Máximos e Mínimos

Se $f(c)$ é um extremo relativo (máximo ou mínimo relativo) e $f'(c)$ $\exists$ então

$$f'(c) = 0\,.$$

Note que $f'(c) = 0$ uma condição necessária, mas não suficiente, para que $f(c)$ seja um extremo relativo.

**Definição**

Ponto Crítico

Todos os pontos $x$ em que $f'(x) = 0$ ou $f'(x) \nexists$ são chamados pontos críticos.

# Máximos e Mínimos – Exemplo

Para as funções $f$ abaixo, faça seu gráfico, determine seus pontos críticos e seus extremos relativos e absolutos.

- Exemplo 1:

$$f(x) = \begin{cases} 2x^2 - 4 & \text{se } -1 \leq x \leq 1 \\ -x - 1 & \text{se } 1 < x \leq 2 \end{cases}$$

# Máximos e Mínimos – Exemplo

Para as funções $f$ abaixo, faça seu gráfico, determine seus pontos críticos e seus extremos relativos e absolutos.

- Exemplo 1:

$$f(x) = \begin{cases} 2x^2 - 4 & \text{se } -1 \leq x \leq 1 \\ -x - 1 & \text{se } 1 < x \leq 2 \end{cases}$$

- Exemplo 2:

$$f(x) = \begin{cases} 2x^2 - 4 & \text{se } -1 \leq x \leq 1 \\ -x - 1 & \text{se } 1 < x \leq 4 \end{cases}$$

# Máximos e Mínimos

**Teorema**

*Critério da primeira derivada:*

Seja $f$ uma função contínua num intervalo $[a, b]$ e derivável em $(a, b)$, exceto possivelmente num ponto $c \in (a, b)$. Então,

- se $f'(x) > 0$ para todo $x < c$ e $f'(x) < 0$ para todo $x > c$, com $x \in (a, b)$, então $f$ tem máximo relativo em $x = c$;
- se $f'(x) < 0$ para todo $x < c$ e $f'(x) > 0$ para todo $x > c$, com $x \in (a, b)$, então $f$ tem mínimo relativo em $x = c$.

# Máximos e Mínimos

**Teorema**

*Critério da segunda derivada:*

Sejam $f$ uma função derivável num intervalo $(a, b)$ e $c \in (a, b)$ um ponto crítico. Se $f''$ existe em $(a, b)$, então:

- se $f''(c) < 0$, $f$ tem máximo relativo em $x = c$;
- se $f''(x) > 0$, $f$ tem mínimo relativo em $x = c$.

# Máximos e Mínimos – Exemplo

Encontre os máximos e mínimos de $f$ aplicando o critério da derivada segunda.

$$f(x) = 18x + 3x^2 - 4x^3$$

# Teorema de Rolle e Valor Médio

**Teorema**

*Seja $f$ um função com $D_f = [a, b]$ e derivável em $(a, b)$. Se $f(a) = f(b) = 0$ então existe ao menos um $x \in (a, b)$ tal que $f'(x) = 0$.*

# Teorema de Rolle e Valor Médio

## Teorema

*Seja $f$ um função com $D_f = [a, b]$ e derivável em $(a, b)$. Se $f(a) = f(b) = 0$ então existe ao menos um $x \in (a, b)$ tal que $f'(x) = 0$.*

## Teorema

*Seja $f$ uma função contínua em $[a, b]$ e derivável em $(a, b)$. Existe um $x \in (a, b)$ tal que*

$$f'(x) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

# Concavidade e Pontos de Inflexão

O lado direito do Congresso Nacional é Côncavo e o lado esquerdo é convexo.

Alguns livros de matemática se referem a côncavo como "concavidade para cima" e convexo como "concavidade para baixo".

# Concavidade e Pontos de Inflexão

Seja $f$ uma função contínua no intervalo $[a, b]$ e derivável até segunda ordem no intervalo $(a, b)$

- Se $f''(x) > 0$ para todo $x \in (a, b)$, então $f$ é côncava.
- Se $f''(x) < 0$ para todo $x \in (a, b)$, então $f$ é convexa.

# Concavidade e Pontos de Inflexão

Seja $f$ uma função contínua no intervalo $[a, b]$ e derivável até segunda ordem no intervalo $(a, b)$

- Se $f''(x) > 0$ para todo $x \in (a, b)$, então $f$ é côncava.
- Se $f''(x) < 0$ para todo $x \in (a, b)$, então $f$ é cônvexa.

## Definição

Ponto de Inflexão

O ponto $(c, f(c))$ é dito Ponto Inflexão da função $f$ se sua concavidade muda em $x = c$.

# Concavidade e Pontos de Inflexão – Exemplo

Detemine os intervalos onde a função abaixo é côncava e onde é convexa, seus pontos de inflexão, extremos relativos e absolutos. Usando essas informações, faça um esboço de seu gráfico.

$$f(x) = x^4 - 2x^2 + 1$$

# Problemas de Maximização e Minimização

Uma vez que sabemos determinar os extremos de uma função, podemos expressar um problema de maximização ou minimização como um problema de encontrar o máximo ou mínimo de uma função. Vejamos o exemplo abaixo:

- Exemplo: Ponto de equilíbrio de uma partícula suspensa por uma mola.
  Considere uma partícula de massa $m$ sujeita a uma aceleração gravitacional $g$ e suspensa verticalmente por uma mola de constante elástica $k$. O ponto de equilíbrio do sistema é tal que a energia total é mínima, determine-o.

# Problemas de Maximização e Minimização

Uma vez que sabemos determinar os extremos de uma função, podemos expressar um problema de maximização ou minimização como um problema de encontrar o máximo ou mínimo de uma função. Vejamos o exemplo abaixo:

- Exemplo (exercício da lista)
  Uma rede de água ligará uma central de abastecimento situada na margem de um rio de 500 metros de lagura a um conjunto habitacional situado na outra margem do rio, 2000 metros abaixo da central. O custo da obra através do rio é de R\$ $640,00$ por metro, e por terra de R\$ $312,00$. Qual a forma mais econômica de instalar a rede de água?

# Regras de L'Hôpital

As regras de L'Hôpital são muito úteis para calcular limites de algumas expressões indeterminadas. Sua forma mais simples estabelece que: se

$$\lim_{x\to c} f(x) = \lim_{x\to c} g(x) = 0 \text{ ou } \pm\infty$$

e

$$\lim_{x\to c} \frac{f'(x)}{g'(x)} \exists$$

então

$$\lim_{x\to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to c} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

# Regras de L'Hôpital – Exemplos

- Exemplo 1: "onde não aplicar"

$$\lim_{x \to \infty} \frac{x + \operatorname{sen}(x)}{x}$$

# Regras de L'Hôpital – Exemplos

- Exemplo 1: "onde não aplicar"

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x + \operatorname{sen}(x)}{x}$$

- Exemplo 2: "onde aplicar"

$$\lim_{x\to\infty} \frac{2x}{e^x - 1}$$

# Regras de L'Hôpital – Exemplos

- Exemplo 1: "onde não aplicar"

$$\lim_{x \to \infty} \frac{x + \text{sen}\,(x)}{x}$$

- Exemplo 2: "onde aplicar"

$$\lim_{x \to \infty} \frac{2x}{e^x - 1}$$

- Exemplo 3:

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^2 + x - 6}{x^2 - 3x + 2}$$

# Fórmula de Taylor

Seja $f$ uma função derivável até ordem $n$ num ponto $c$ de seu domínio. O polinônimo de Taylor de ordem $n$ da função $f$ no ponto $c$ é dado por:

$$P_n(x) = f(c) + f'(c)(x-c) + \frac{1}{2!}f''(c)(x-c)^2 + \ldots + \frac{1}{n!}f^{(n)}(c)(x-c)^n$$

Ao aproximar uma função $f$ pelo polinômio $P_n$ surge o seguinte erro

$$R_n(x) = \frac{1}{(n+1)!}f^{(n+1)}(z)(x-c)^{n+1} \quad ,$$

onde $z$ é um número em $x$ e $c$.

# Fórmula de Taylor

- Ex.1: Determine o polinômio de Taylor de terceira ordem de $f(x) = \text{sen}(x)$ em torno de $x = 0$.

# Fórmula de Taylor

- Ex.1: Determine o polinômio de Taylor de terceira ordem de $f(x) = \operatorname{sen}(x)$ em torno de $x = 0$.
- Ex.2: Para o entorno de $x = 1$, determine o polinômio de Taylor de quarta ordem da função $f(x) = x^4 - x^3 + x + 1$ e seu erro .