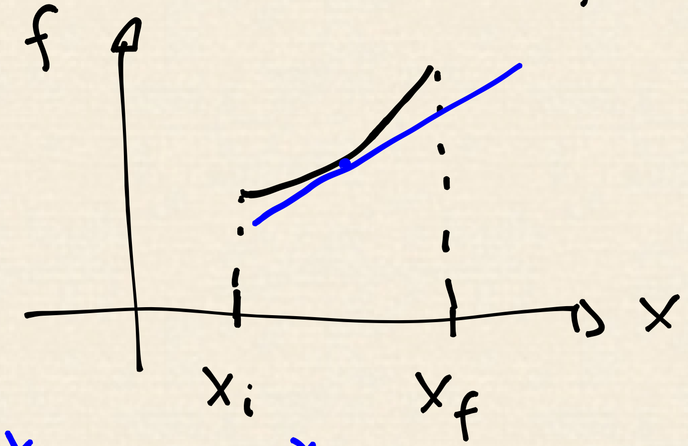
4/11/2020

APLICAÇÕES DE DERIVADAS

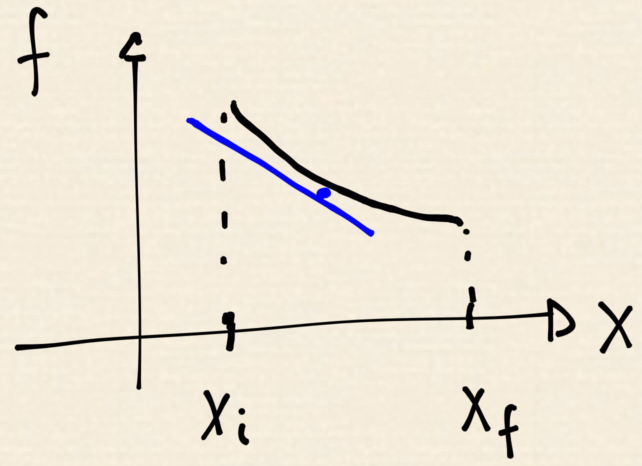
FUNÇÃO CRESCENTE: $x_2 > x_1$ e $f(x_2) > f(x_1)$



$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(\overbrace{x+\Delta x}^{x_2}) - f(\overbrace{x}^{x_1})}{\Delta x} > 0$$

FUNÇÃO DECRESCENTE: $x_2 > x_1$ e $f(x_2) < f(x_1)$

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(\overbrace{x+\Delta x}^{x_2}) - f(\overbrace{x}^{x_1})}{\Delta x} < 0$$



Se f é derivável em (a,b):

$f'(x) > 0$, $x \in (a,b)$, f é crescente em $[a,b]$

$f'(x) < 0$, $x \in (a,b)$, f é decrescente em $[a,b]$

Ex. 0 $f(x) = ax + b$

$$f'(x) = a \Rightarrow \begin{cases} \text{Se } a > 0 \Rightarrow f \text{ é crescente.} \\ \text{Se } a < 0 \Rightarrow f \text{ é decrescente.} \end{cases}$$

Ex. 1 $f(x) = x^2 - x + 5$

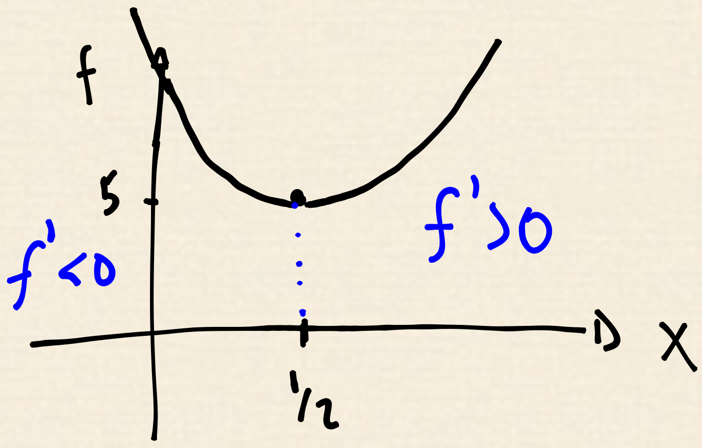
$f'(x) = 2x - 1$

f é crescente para $x \mid f'(x) > 0 \Rightarrow 2x - 1 > 0$

$x > 1/2$ //

f é decrescente para $x \mid f'(x) < 0 \Rightarrow 2x - 1 < 0$

$x < 1/2$ //



$f(1/2) = \frac{1}{4} - \frac{1}{2} + 5$

$= \frac{1 - 2 + 20}{4} = \frac{19}{4}$

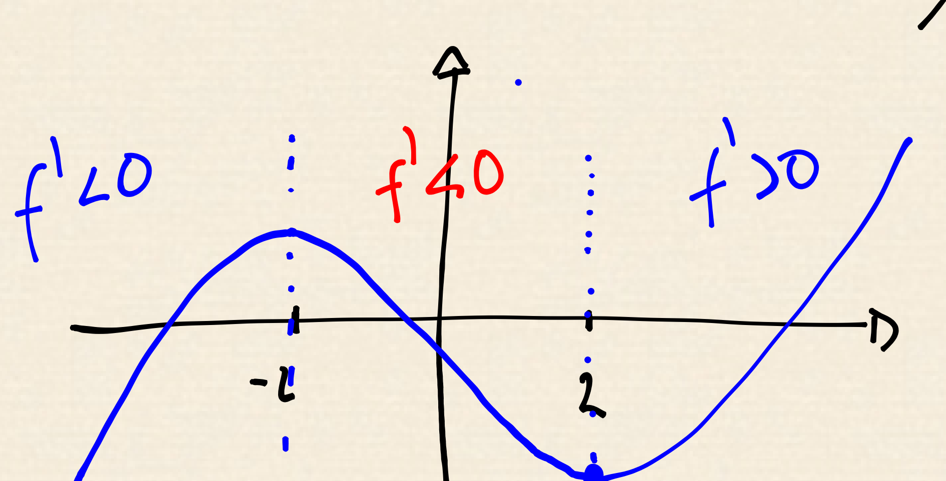
Ex. 2 $f(x) = x^3 - 12x - 5$

$f'(x) = 3x^2 - 12$

$f'(x) > 0 \Rightarrow 3x^2 - 12 > 0 \Rightarrow \sqrt{x^2} > \sqrt{4} \Rightarrow |x| > 2$

$$\Rightarrow \begin{cases} x > 2 \\ -x > 2 \Rightarrow x < -2 \end{cases} \Rightarrow -2 > x > 2$$ //

$f'(x) < 0 \Rightarrow |x| < 2 \Rightarrow -2 < x < 2$ //



5/11/2020

Ex.3 $f(x) = \begin{cases} 2x^2 - 4 , & x \leq 1 \\ -x - 1 , & x > 1 \end{cases}$ $\to f(1) = -2$, $\to f(0) = -4$

$f'(x) = \begin{cases} 4x , & x < 1 \\ -1 , & x > 1 \end{cases}$ $\quad f'(1) \nexists$.

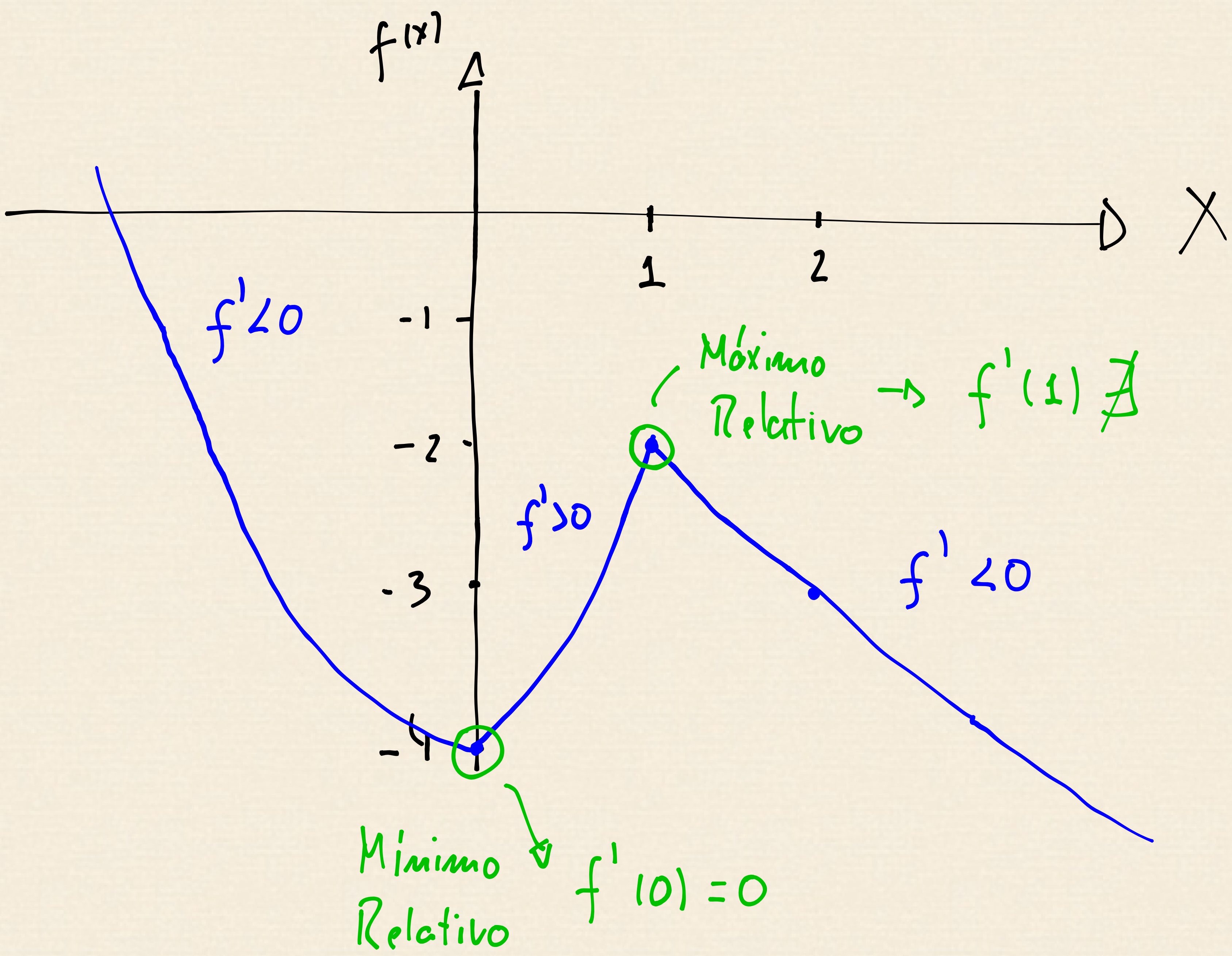
$f'(x) > 0 \Rightarrow 4x > 0 \Rightarrow \underline{x > 0 \text{ para } x < 1}$

f' é crescente em $x \in (0, 1)$

$f' < 0$ para $\underline{x < 1} \Rightarrow 4x < 0 \Rightarrow x < 0$

para $x > 1 \Rightarrow -1 < 0$ verdade para qualquer x

f é decrescente para x $(-\infty, 0) \cup (1, +\infty)$



Ex.4 $f(x) = x^3 - 3x + 1$, $f'(x) = 3x^2 - 3$

$f'(x) > 0 \Rightarrow 3x^2 - 3 > 0 \Rightarrow \sqrt{x^2} > \sqrt{1}$

$\Rightarrow |x| > 1$

f é crescente no intervalo $-1 > x > 1$

$f'(x) < 0 \Rightarrow |x| < 1 \Rightarrow -1 < x < 1$

f é decrescente no intervalo

EXTREMO RELATIVOS

Se $f(c)$ é um extremo relativo e $f'(c)\ \exists$, então

$f'(c) = 0$.

Ex.1 $f(x) = ax^2 + bx + c$

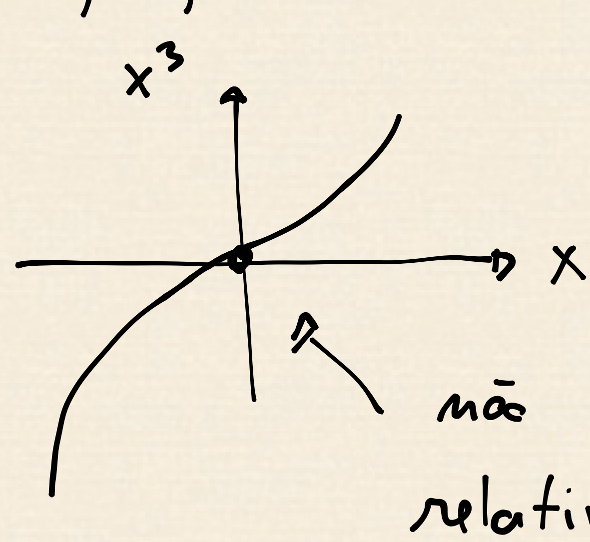
$f'(x) = 2ax + b$, $f'(x) = 0 \Rightarrow x = -\frac{b}{2a}$

vértice

extremo relativo

Ex.2 $f(x) = x^3$

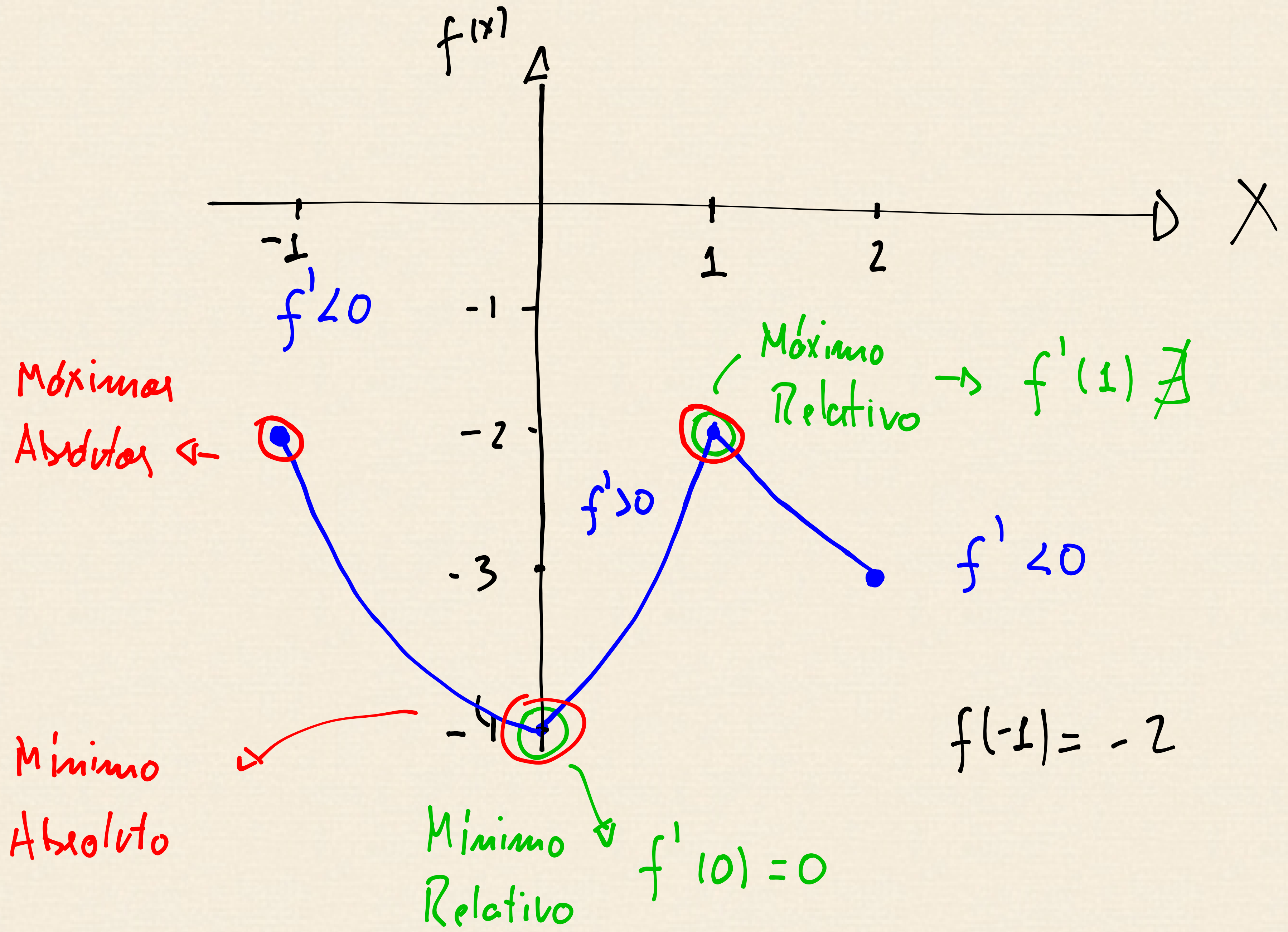
$f'(x) = 3x^2$, $f'(x) = 0 \Rightarrow x = 0$



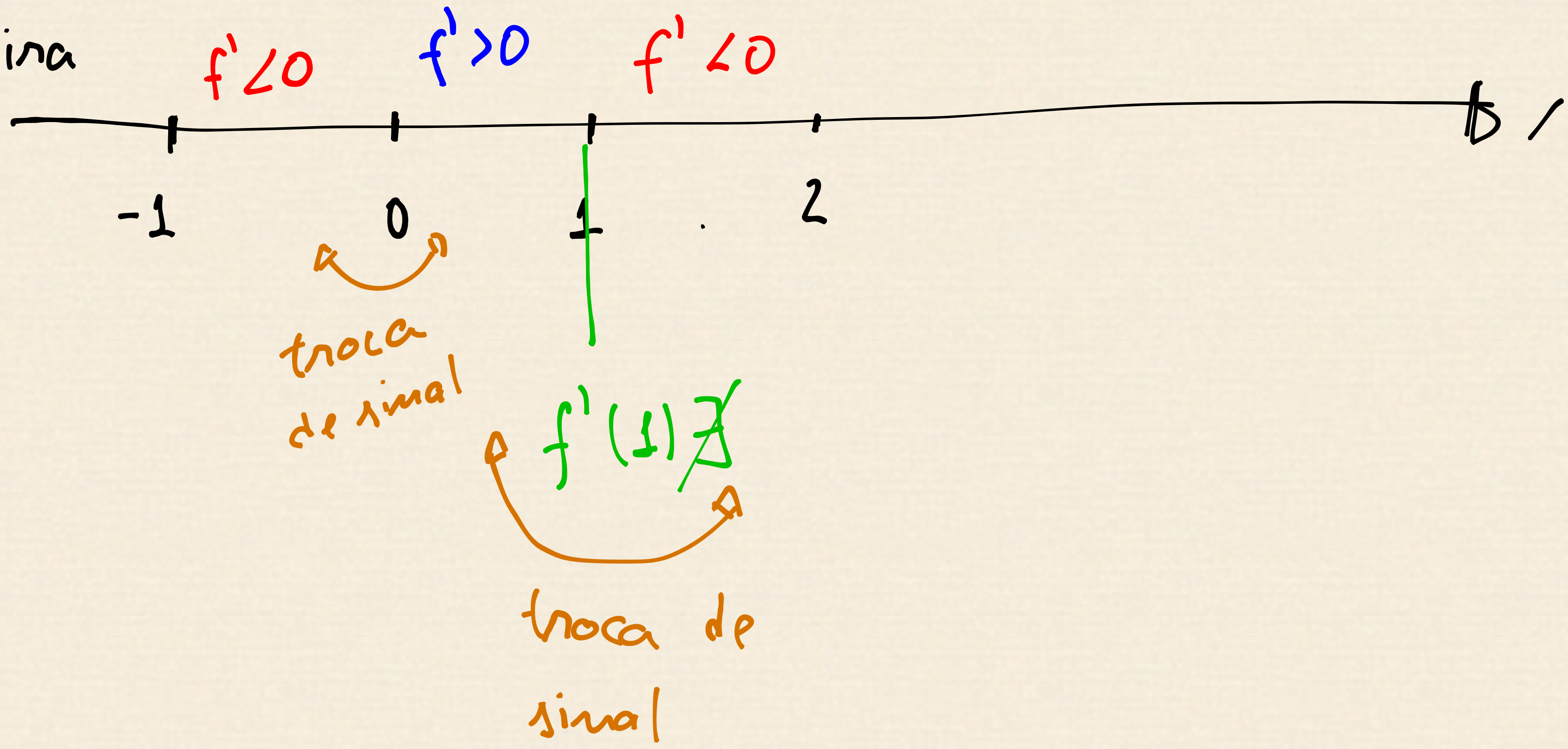
não é extremo relativo.

Ex. 1 $f(x) = \begin{cases} 2x^2 - 4 & , \ -1 \le x \le 1 \\ -x - 1 & , \ 1 < x \le 2 \end{cases}$

Determinar extremos relativos e absolutos.



Critério da derivada
Primeira



Critério da derivada segunda:

Se $f''(c) < 0$ e $f'(c) = 0$, $f(c)$ é Máximo Relativo.

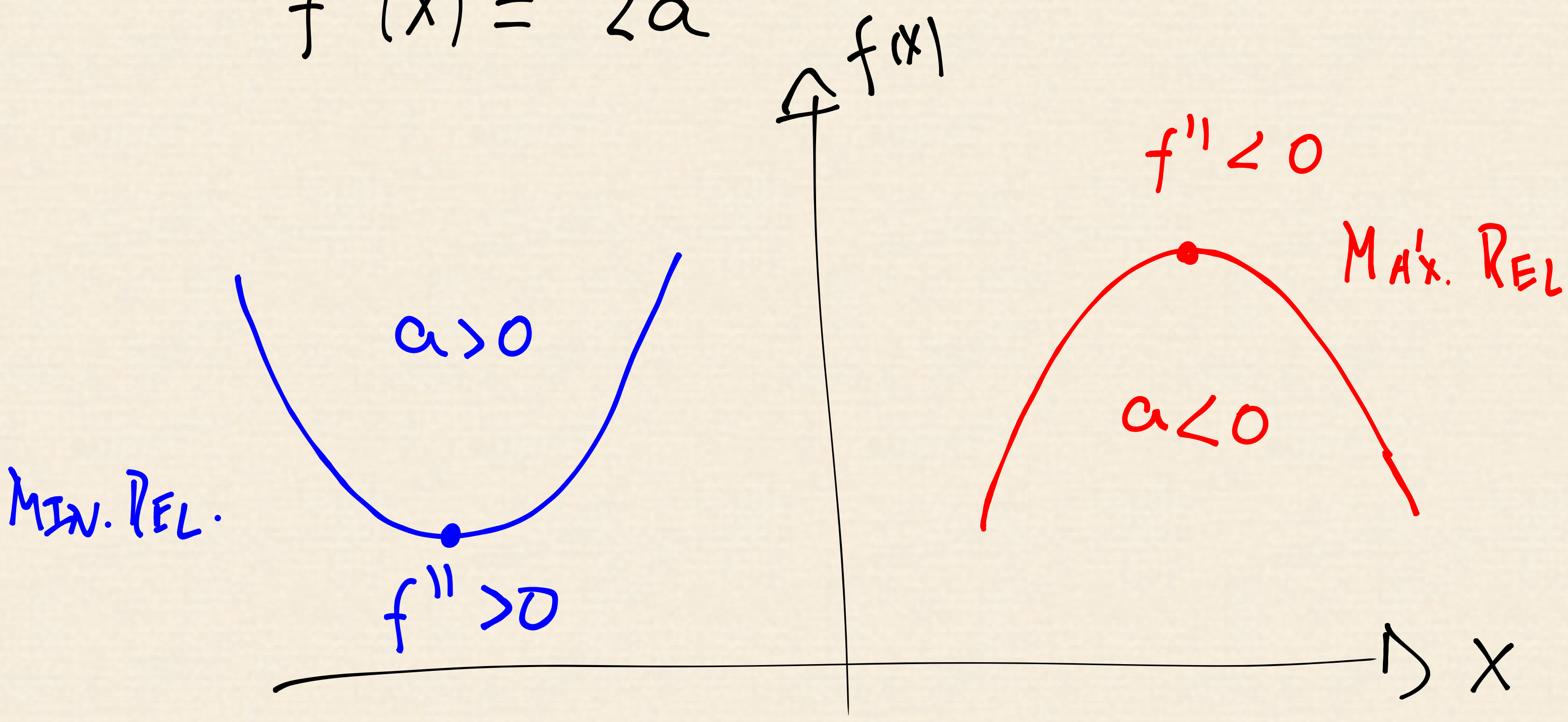
Se $f''(c) > 0$ e $f'(c) = 0$, $f(c)$ é Mínimo Relativo.

Ex. 0

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

$$f'(x) = 2ax + b \ , \quad f'(x) = 0 \Rightarrow x = -\frac{b}{2a}$$

$$f''(x) = 2a$$



Ex. 1 $\quad f(x) = -4x^3 + 3x^2 + 18x$

$$f'(x) = -12x^2 + 6x + 18$$

Pontos críticos $f'(x) = 0 \Rightarrow \quad -2x^2 + x + 3 = 0$

$$x^2 = \frac{1}{-4}\left[-1 \pm \sqrt{1+24}\right]$$

$f'(-1) = 0$

$f'(3/2) = 0$

$$x^2 = -\frac{1}{4}\left[-1 \pm 5\right]$$

$$x_1 = -1, \quad x_2 = +3/2$$

$f''(x) = -24x + 6$

$f''(-1) = +24 + 6 > 0 \Rightarrow$ em $x = -1$ há MIN. REL.

$f''(3/2) = -36 + 6 < 0 \Rightarrow$ em $x = \frac{3}{2}$ há MAX. REL.

Retomando exemplo $f(x) = x^3$.

$f'(x) = 3x^2 = 0 \Rightarrow x = 0$

Derivada 1ª: $f'(x) > 0$ $\Rightarrow$ não troca sinal $\Rightarrow$ não $\nexists$ extremo

Derivada 2ª: $f''(x) = 6x$, $f''(0) = 0$

$\Rightarrow \nexists$ extremo pois deveria ser $f'' < 0$ ou $f'' > 0$.

10/11/2020

CONCAVIDADE DE FUNÇÕES

Se $f''(x) > 0$, $x \in (a,b)$, f é côncava em (a,b).

Se $f''(x) < 0$, $x \in (a,b)$, f é convexa em (a,b).

Ex. $f(x) = x^4 - 2x^2 + 1$

$f'(x) = 4x^3 - 4x$

$f''(x) = 12x^2 - 4$

$f''(x) > 0 \Rightarrow 12x^2 - 4 > 0 \Rightarrow \sqrt{x^2} > \sqrt{1/3}$

$\Rightarrow |x| > 1/\sqrt{3}$

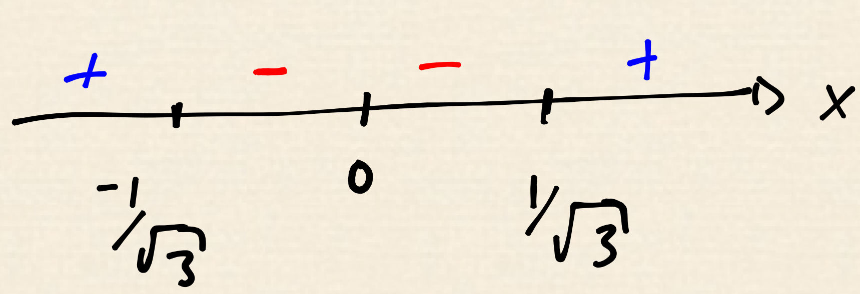
f' é côncava em $-1/\sqrt{3} > x > 1/\sqrt{3}$

$f''(x) < 0 \Rightarrow |x| < 1/\sqrt{3} \Rightarrow -1/\sqrt{3} < x < 1/\sqrt{3}$

f é convexa em

Pontos de Inflexão $x = \pm 1/\sqrt{3}$

Sinal de f''



Extremos: $f'(x) = 0 \Rightarrow 4x^3 - 4x = 0$

$x(x^2 - 1) = 0$

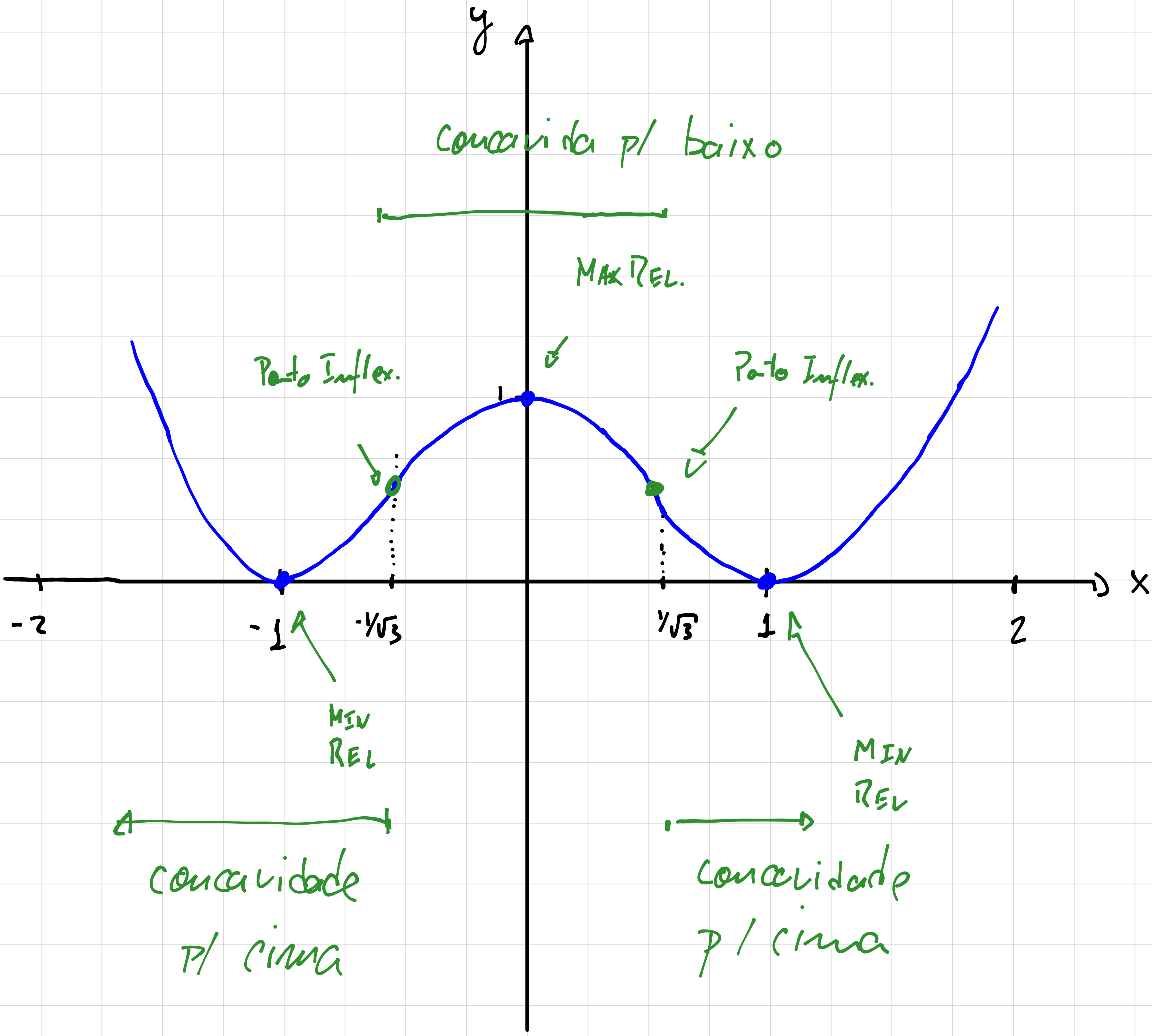
Solução: $x = 0$, $x = \pm 1$

$f''(0) = -4 < 0$, $f''(\pm 1) = 8 > 0$

$f(x) = x^4 - 2x^2 + 1$

Extremos $f(0) = 1$ MAX. REL

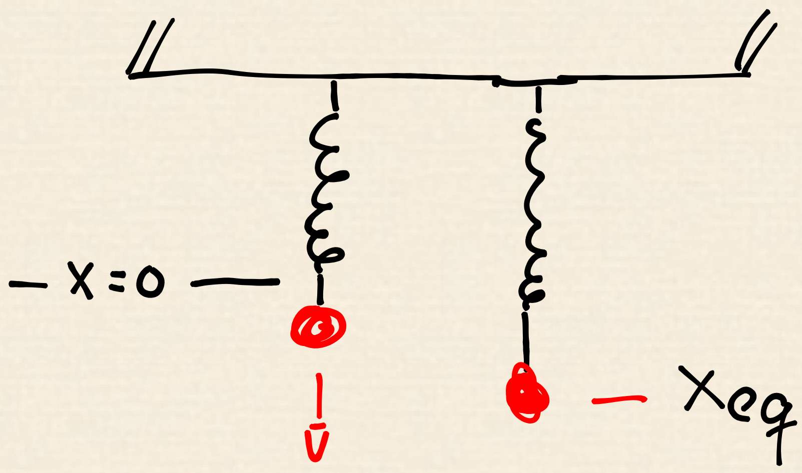
$f(\pm 1) = 0$ MIN. REL



13/11/2020

Otimização

Ex. Minimização de energia



$$E = E_{El.} + E_G$$

$$E = \frac{kx^2}{2} - mgx$$

$$\frac{dE(x)}{dx} = 0 \Rightarrow \underbrace{kx}_{-F_e} - \underbrace{mg}_{F_G} = 0 \Rightarrow x_{eq} = \frac{mg}{k}$$

$$\frac{d^2}{dx} E^2(x) = k > 0 \Rightarrow E(x_{eq})$$ é mínimo da função.

REGRAS DE L'HÔPITAL

Se $\lim_{x \to c} f(x) = \lim_{x \to c} g(x) = \begin{cases} 0 \\ +\infty \\ -\infty \end{cases}$

e $\lim_{x \to c} \frac{f'(x)}{g'(x)} \ \exists$, então

$$\boxed{\lim_{x \to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to c} \frac{f'(x)}{g'(x)}}$$

Ex.2 $\lim_{x \to \infty} \frac{2x}{e^x - 1} = \text{"}\frac{\infty}{\infty}\text{"}$

$\frac{f}{g} = \frac{2x}{e^x - 1}$, $\frac{f'}{g'} = \frac{2}{e^x}$, $\lim_{x \to \infty} \frac{2}{e^x} = 0 //$

$$\lim_{x \to \infty} \frac{2x}{e^x - 1} = 0 //$$

Ex.3 $\lim_{x \to \infty} \frac{\overbrace{x^2 + x - 6}^{f}}{\underbrace{x^2 - 3x + 2}_{g}} = \text{"}\frac{\infty}{\infty}\text{"}$

$\frac{f'}{g'} = \frac{2x + 1}{2x - 3}$, $\frac{f''}{g''} = \frac{2}{2} = 1$

$$\lim_{x \to \infty} \frac{x^2 + x - 6}{x^2 - 3x + 2} = \lim_{x \to \infty} \frac{2x + 1}{2x - 3} = \lim_{x \to \infty} 1 = 1 //$$

17/11/2020

FÓRMULA DE TAYLOR

$$P_n(x) = f(c) + f'(c)(x-c) + \frac{f''(c)}{2!}(x-c)^2 + \frac{f'''(c)}{3!}(x-c)^3 + \dots \frac{1}{n!} f^{(n)}(c)(x-c)^n$$

$P_n(x)$ aproxima $f(x)$ no entorno de $x=c$.

Ex.1 $f(x) = \operatorname{sen} x$, $P_3(x)$ no entorno de $x=0$.

Derivadas

$f'(x) = \cos(x)$, $f'(0) = 1$, $f(0) = 0$

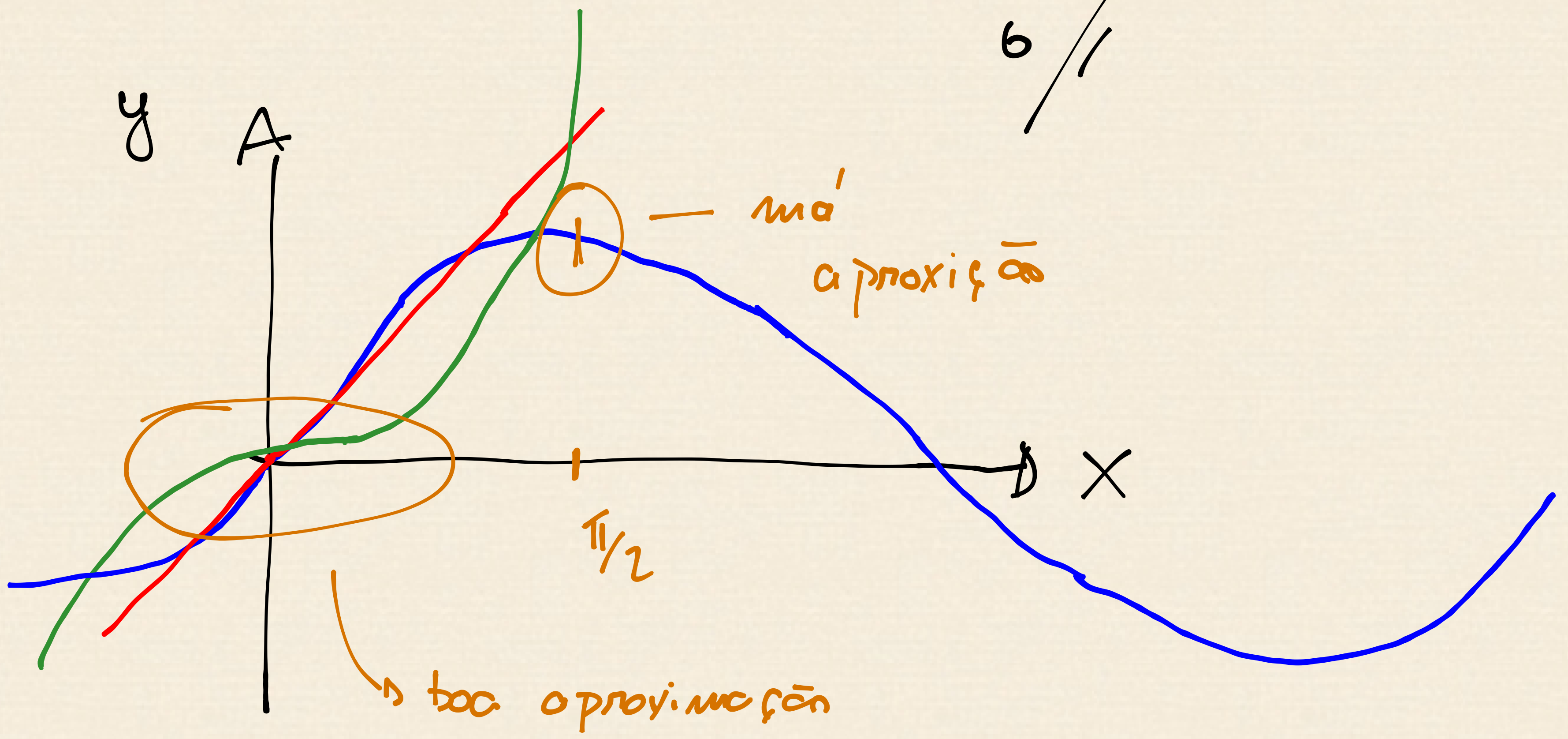
$f''(x) = -\operatorname{sen}(x)$, $f''(0) = 0$

$f'''(x) = -\cos(x)$, $f'''(0) = -1$

$$f(x) = \operatorname{sen}(x) \simeq P_3(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2 + \frac{f'''(0)}{6}x^3$$

$$\operatorname{sen}(x) \simeq 0 + x + 0 \cdot \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6}$$

$$\operatorname{sen}(x) \simeq x - \frac{x^3}{6} \quad //$$



Ex. 2 $\quad f(x) = x^4 - x^3 + x + 1$, $P_4(x)$ no entorno $x = 1$

$$f'(x) = 4x^3 - 3x^2 + 1, \quad f'(1) = 2, \quad f(1) = 2$$
$$f''(x) = 12x^2 - 6x, \quad f''(1) = 6$$
$$f'''(x) = 24x - 6, \quad f'''(1) = 18$$
$$f^{iv}(x) = 24, \quad f^{iv}(1) = 24$$
$$f^{v}(x) = 0 \ (!), \quad f^{v}(1) = 0$$

$$f(x) \simeq P_4(x) = f(1) + f'(1)(x-1) + \frac{f''(1)}{2}(x-1)^2 + \frac{f'''(1)}{6}(x-1)^3 + \frac{f^{iv}(1)}{24}(x-1)^4$$

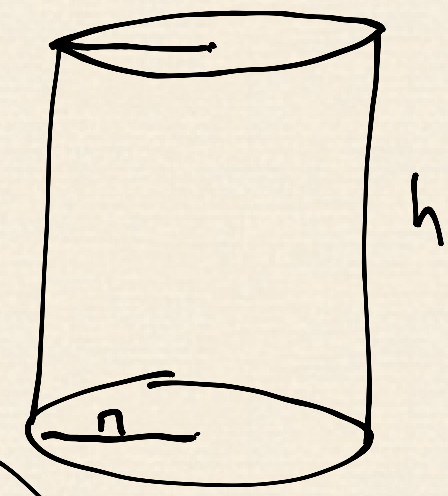
$$P_4(x) = 2 + 2(x-1) + 3(x-1)^2 + 3(x-1)^3 + (x-1)^4$$

Erro: $R_4(x) = \frac{1}{5!}\underbrace{f^{v}(\xi)}_{\to 0}(x-1)^5 = 0$

$\Rightarrow \boxed{f(x) = P_4(x)}$ verifique!

<u>Exercícios Lista</u>

Sec. 3, ② $V = 1L$

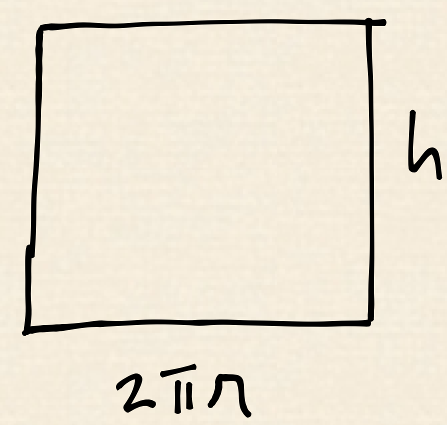


$V = \boxed{\pi r^2 \cdot h = 1}$

Superfície

= 2 tampas + "corpo"

$$S(r) = 2(\pi r^2) + 2\pi r h$$



Minimize $S(r)$.

Sec. 4, 2(b)

$$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen}(x^2)}{x} = \text{"}\frac{0}{0}\text{"}$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen}(x^2)}{x} \overset{\text{L'Hopital}}{=} \lim_{x \to 0} \frac{2x \cos(x^2)}{1} = 0$$

Extra: relação com a fórmula de Taylor.

$$f(x) = \operatorname{sen}(x^2) \simeq f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2$$

$$\simeq 0 + 2x\cos(x^2)\Big|_{x=0} x + \Big[2\cos(x^2) - 4x^2 \operatorname{sen}(x^2)\Big]_{x=0} \cdot \frac{x^2}{2}$$

$$\simeq 2 \cdot \frac{x^2}{2} = x^2$$

$$\frac{\operatorname{sen}(x^2)}{x} \simeq \frac{x^2}{x} = x \Rightarrow \lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen}(x^2)}{x} = \lim_{x \to 0} x = 0$$

2.(c) $\lim_{x \to \infty} \frac{e^{2x}}{x^3 + x^2} = \text{"}\frac{\infty}{\infty}\text{"}$

$$\lim_{x \to \infty} \frac{e^{2x}}{x^3+x^2} = \lim_{x \to \infty} \frac{2e^{2x}}{3x^2+2x} = \lim_{x \to \infty} \frac{4e^{2x}}{6x+2} = \lim_{x \to \infty} \frac{8e^{2x}}{6} = +\infty$$