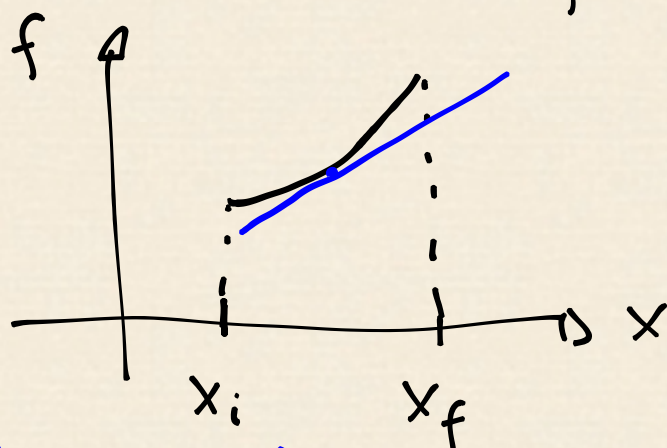


~~11/11/2020~~

10/4/2021

APLICAÇÕES DE DERIVADAS

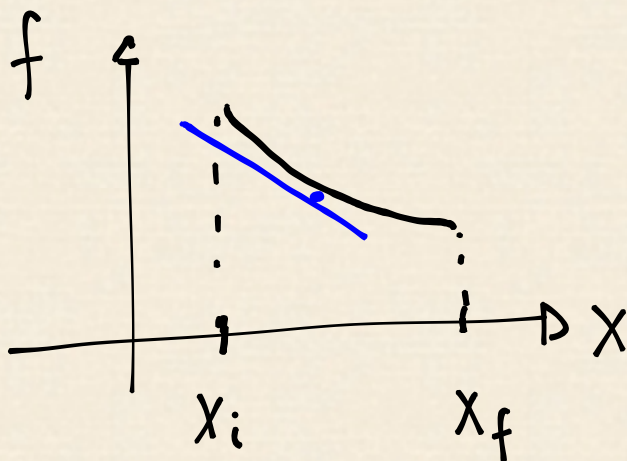
FUNÇÃO CRESCENTE: $x_2 > x_1$ e $f(x_2) > f(x_1)$



$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(\overbrace{x+\Delta x}^{x_2}) - f(\underbrace{x}_{x_1})}{\Delta x} > 0$$

FUNÇÃO DECRESCENTE: $x_2 > x_1$ e $f(x_2) < f(x_1)$

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(\overbrace{x+\Delta x}^{x_2}) - f(\underbrace{x}_{x_1})}{\Delta x} < 0$$



Se f é derivável em (a,b) :

$f'(x) > 0$, $x \in (a,b)$, f é crescente em $[a,b]$

$f'(x) < 0$, $x \in (a,b)$, f é decrescente em $[a,b]$

Ex.0 $f(x) = ax + b$

$$f'(x) = a \Rightarrow \begin{cases} \text{Se } a > 0 \Rightarrow f \text{ é crescente.} \\ \text{Se } a < 0 \Rightarrow f \text{ é decrescente.} \end{cases}$$

Ex.1 $f(x) = x^2 - x + 5$

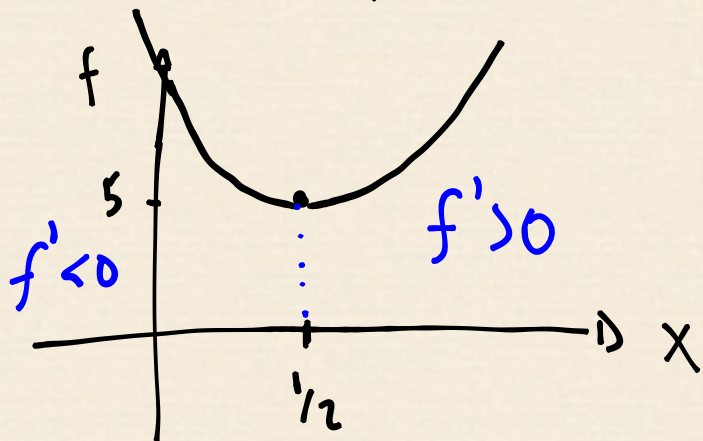
$$f'(x) = 2x - 1$$

$$f \text{ é crescente para } x \mid f'(x) > 0 \Rightarrow 2x - 1 > 0$$

$$x > \frac{1}{2} //$$

$$f \text{ é decrescente para } x \mid f'(x) < 0 \Rightarrow 2x - 1 < 0$$

$$x < \frac{1}{2} //$$



$$\begin{aligned} f\left(\frac{1}{2}\right) &= \frac{1}{4} - \frac{1}{2} + 5 \\ &= \frac{1 - 2 + 20}{4} = \frac{19}{4} \end{aligned}$$

Ex.2 $f(x) = x^3 - 12x - 5$

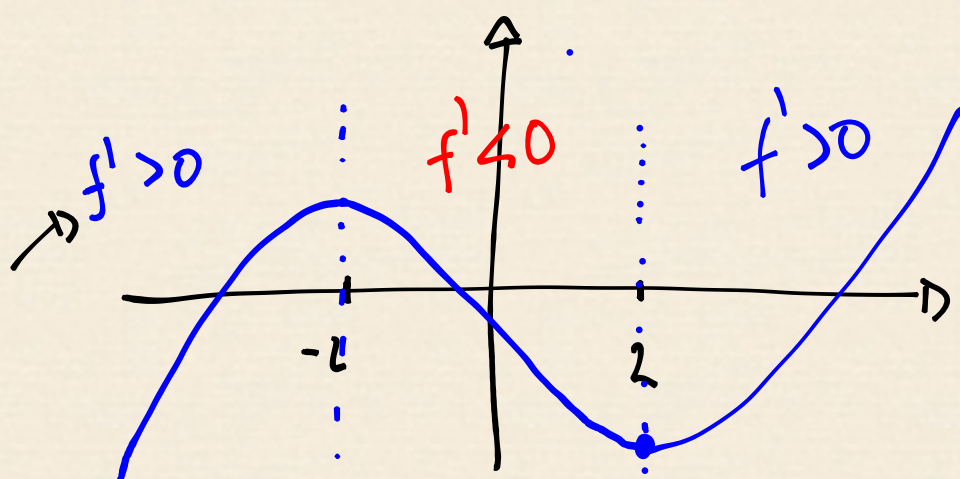
$$f'(x) = 3x^2 - 12$$

$$f'(x) > 0 \Rightarrow 3x^2 - 12 > 0 \Rightarrow \sqrt{x^2} > \sqrt{4} \Rightarrow |x| > 2$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x > 2 \\ -x > 2 \Rightarrow x < -2 \end{cases} \Rightarrow -2 > x > 2 //$$

$$f'(x) < 0 \Rightarrow |x| < 2 \Rightarrow -2 < x < 2 //$$

correção da
vídeo aula 6.



12/4/2021

Ex. 3 $f(x) = \begin{cases} 2x^2 - 4, & x \leq 1 \\ -x - 1, & x > 1 \end{cases} \rightarrow f(1) = -2$
 $\hookrightarrow f(0) = -4$

$$f'(x) = \begin{cases} 4x, & x < 1 \\ -1, & x > 1 \end{cases} \quad f'(1) \text{ } \cancel{\exists}.$$

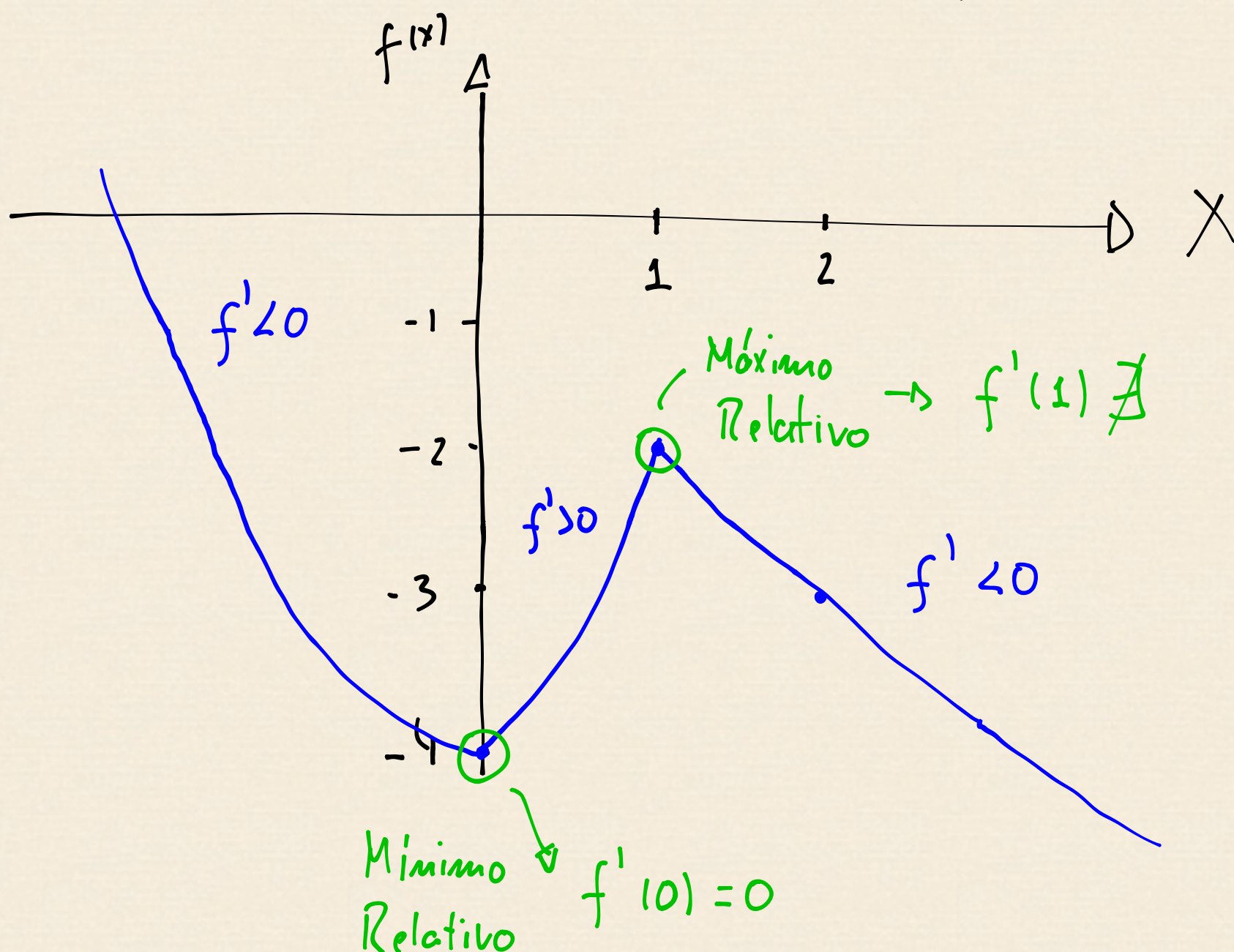
$$f'(x) > 0 \Rightarrow 4x > 0 \Rightarrow \underline{x > 0 \text{ para } x < 1}$$

f' é crescente em $x \in (0, 1)$

$$f' < 0 \text{ para } \underline{x < 1} \Rightarrow 4x < 0 \Rightarrow x < 0$$

para $x > 1 \Rightarrow -1 < 0$ verdade para qualquer x

f é decrescente para $x \in (-\infty, 0) \cup (1, +\infty)$



Ex.4 $f(x) = x^3 - 3x + 1$, $f'(x) = 3x^2 - 3$

$$f'(x) > 0 \Rightarrow 3x^2 - 3 > 0 \Rightarrow \sqrt{x^2} > \sqrt{1}$$

$$\Rightarrow |x| > 1$$

f é crescente no intervalo $\nearrow -1 > x > 1$

$$f'(x) < 0 \Rightarrow |x| < 1 \Rightarrow -1 < x < 1$$

f é decrescente no intervalo $\nearrow$

EXTREMOS RELATIVOS

Se $f(c)$ é um extremo relativo e $f'(c) \exists$, então

$$f'(c) = 0.$$

Ex.1 $f(x) = ax^2 + bx + c$

$$f'(x) = 2ax + b, \quad f'(x) = 0 \Rightarrow x = -\frac{b}{2a}$$

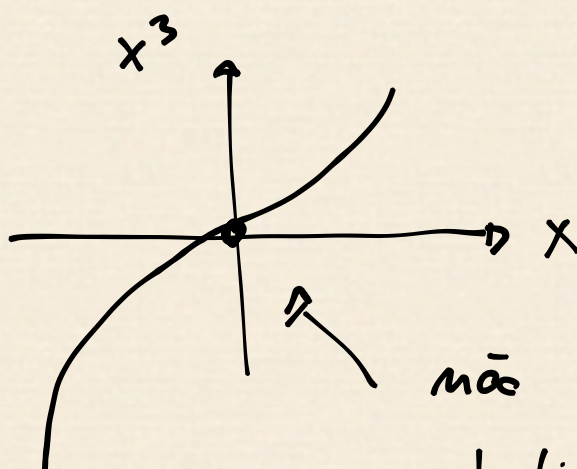
$\nwarrow$ vértice

$\nearrow$ extremo relativo

Ex.2 $f(x) = x^3$

$$f'(x) = 3x^2, \quad f'(x) = 0 \Rightarrow x = 0$$

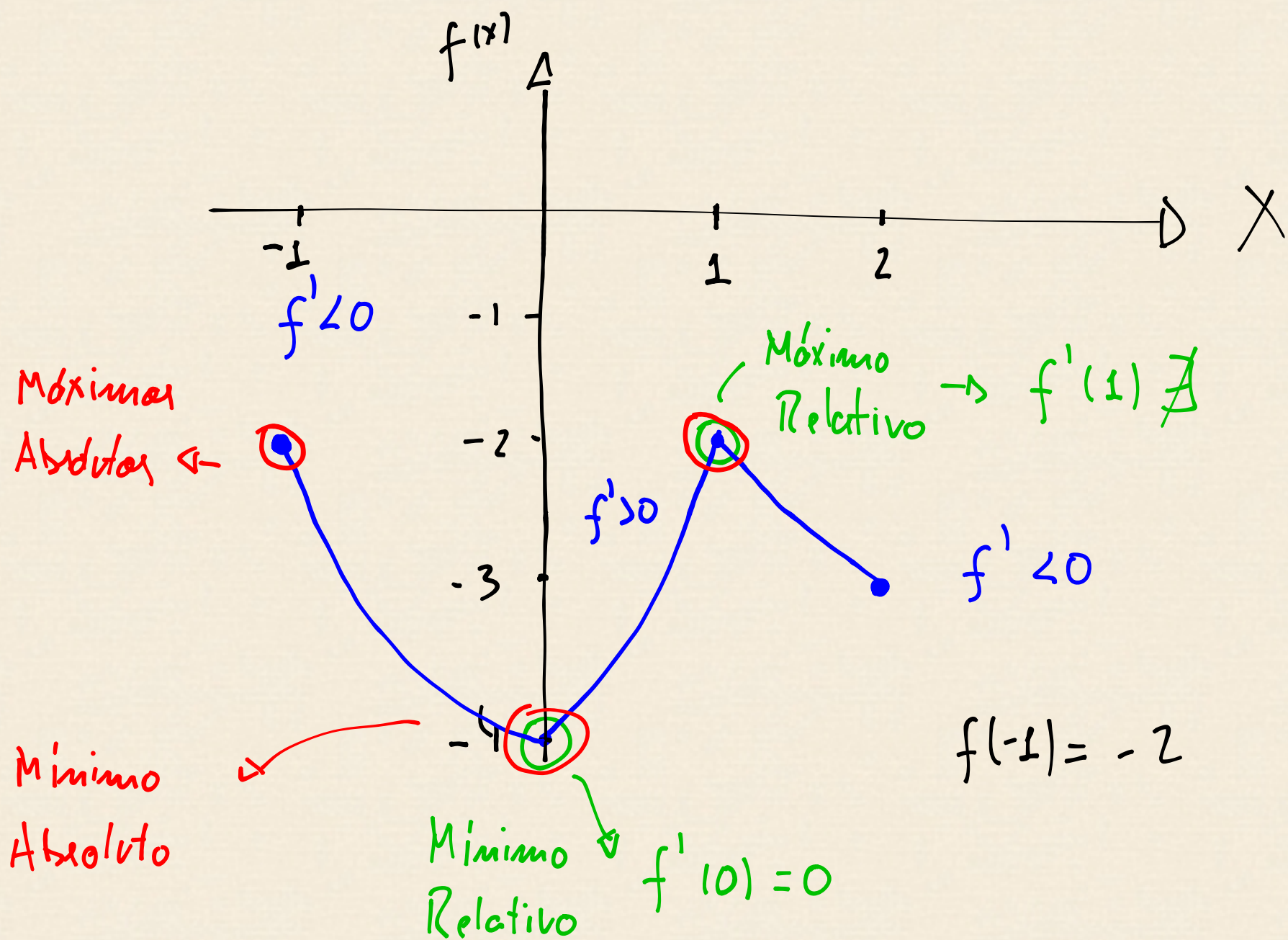
$$f'(x) > 0$$



$\nearrow$ não é extremo relativo.

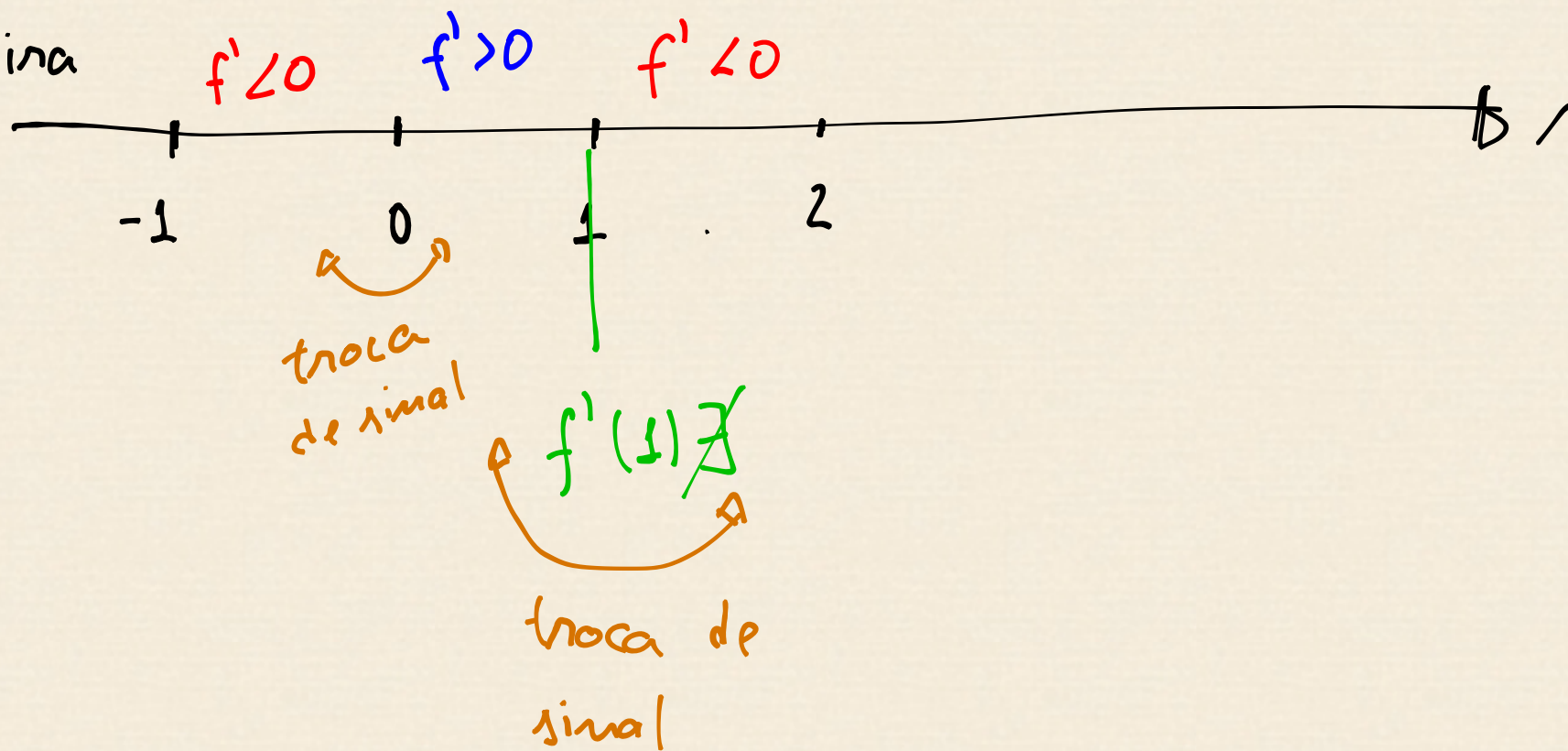
Ex. 1 $f(x) = \begin{cases} 2x^2 - 4 & , -1 \leq x \leq 1 \\ -x - 1 & , 1 < x \leq 2 \end{cases}$

Determinar extremos relativos e absolutos.



Critério da derivada

Primeira



Critério da derivada segunda:

Se $f''(c) < 0$ e $f'(c) = 0$, $f(c)$ é Máximo Relativo.

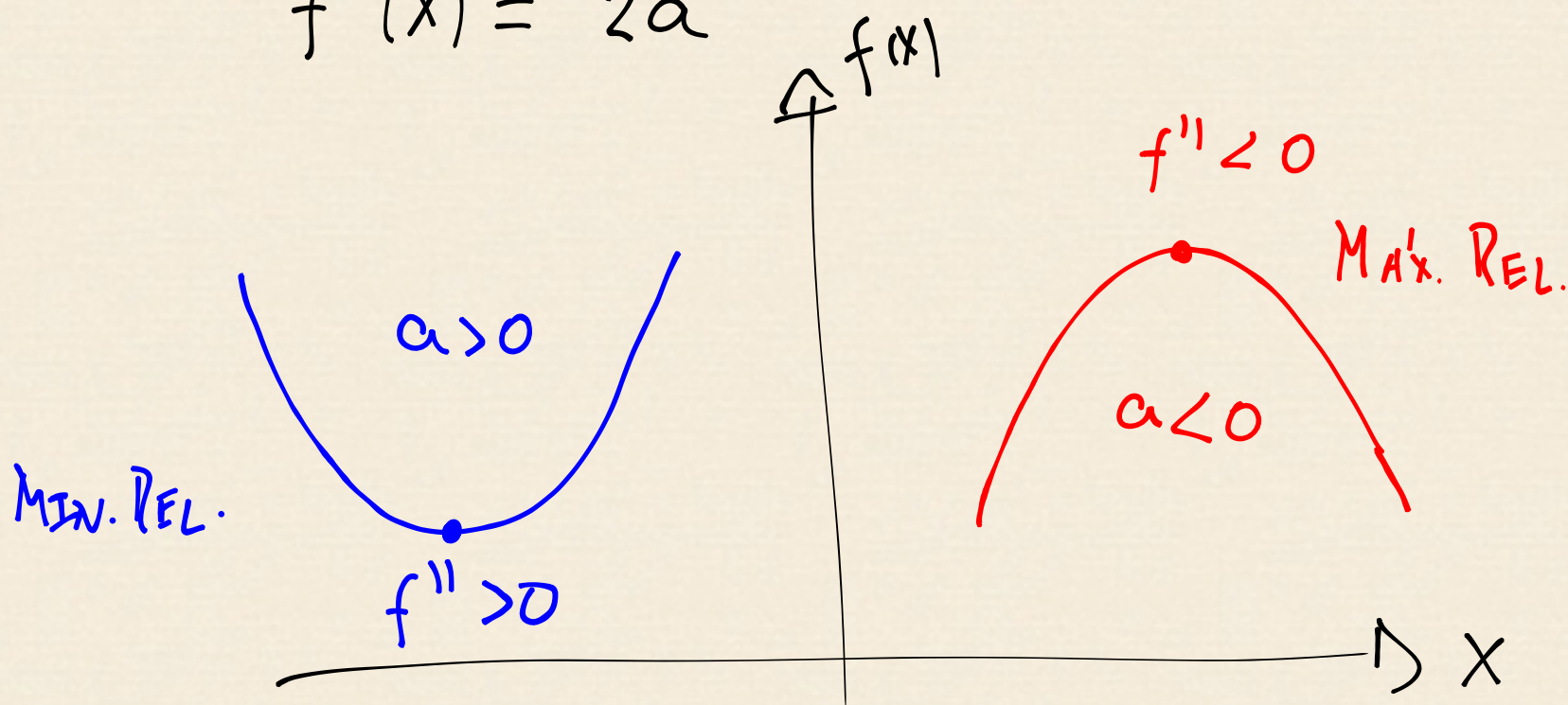
Se $f''(c) > 0$ e $f'(c) = 0$, $f(c)$ é Mínimo Relativo.

Ex.0

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

$$f'(x) = 2ax + b, \quad f'(x) = 0 \Rightarrow x_v = -\frac{b}{2a}$$

$$f''(x) = 2a$$



Ex.1

$$f(x) = -4x^3 + 3x^2 + 18x$$

$$f'(x) = -12x^2 + 6x + 18$$

Pontos críticos $f'(x) = 0 \Rightarrow -2x^2 + x + 3 = 0$

$$x^2 = \frac{1}{-4} \left[-1 \pm \sqrt{1 + 24} \right]$$

$$f'(-1) = 0$$

$$x^2 = -\frac{1}{4} \left[-1 \pm 5 \right]$$

$$f'(3/2) = 0$$

$$x_1 = -1, \quad x_2 = +3/2$$

$$f''(x) = -24x + 6$$

$$f''(-1) = +24 + 6 > 0 \Rightarrow \text{em } x = -1 \text{ há MIN. REL.}$$

$$f''\left(\frac{3}{2}\right) = -36 + 6 < 0 \Rightarrow \text{em } x = \frac{3}{2} \text{ há MAX. REL.}$$

Retomando exemplo $f(x) = x^3$.

$$f'(x) = 3x^2 = 0 \Rightarrow x = 0$$

Derivada 1ª: $f'(x) > 0 \rightarrow$ não troco sinal $\Rightarrow$ não ~~é~~ extremo

Derivada 2ª: $f''(x) = 6x$, $f''(0) = 0$

$\Rightarrow$ ~~é~~ extremo pois

derivada ser $f'' < 0$

ou $f'' > 0$.

CONCAVIDADE DE FUNÇÕES

Se $f''(x) > 0$, $x \in (a,b)$, f' é côncava em (a,b) .

Se $f''(x) < 0$, $x \in (a,b)$, f' é convexa em (a,b) .

Ex. $f(x) = x^4 - 2x^2 + 1$

$$f'(x) = 4x^3 - 4x$$

$$f''(x) = 12x^2 - 4$$

$$f''(x) > 0 \Rightarrow 12x^2 - 4 > 0 \Rightarrow \sqrt{x^2} > \sqrt{1/3}$$

$$\Rightarrow |x| > 1/\sqrt{3}$$

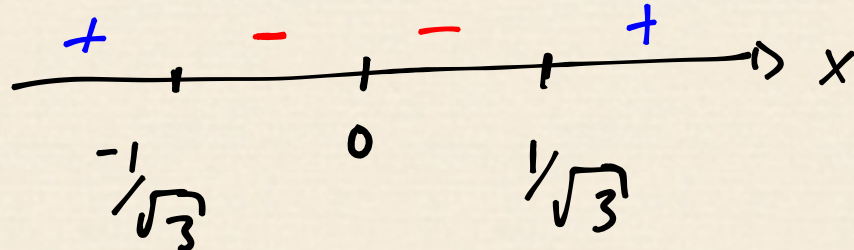
f' é côncava em $-1/\sqrt{3} > x > 1/\sqrt{3}$

$$f''(x) < 0 \Rightarrow |x| < 1/\sqrt{3} \Rightarrow \underline{-1/\sqrt{3} < x < 1/\sqrt{3}}$$

f' é convexa em ↗

Pontos de Inflexão $x = \pm 1/\sqrt{3}$

Sinal de f''



Extremos: $f'(x) = 0 \Rightarrow 4x^3 - 4x = 0$

$$x(x^2 - 1) = 0$$

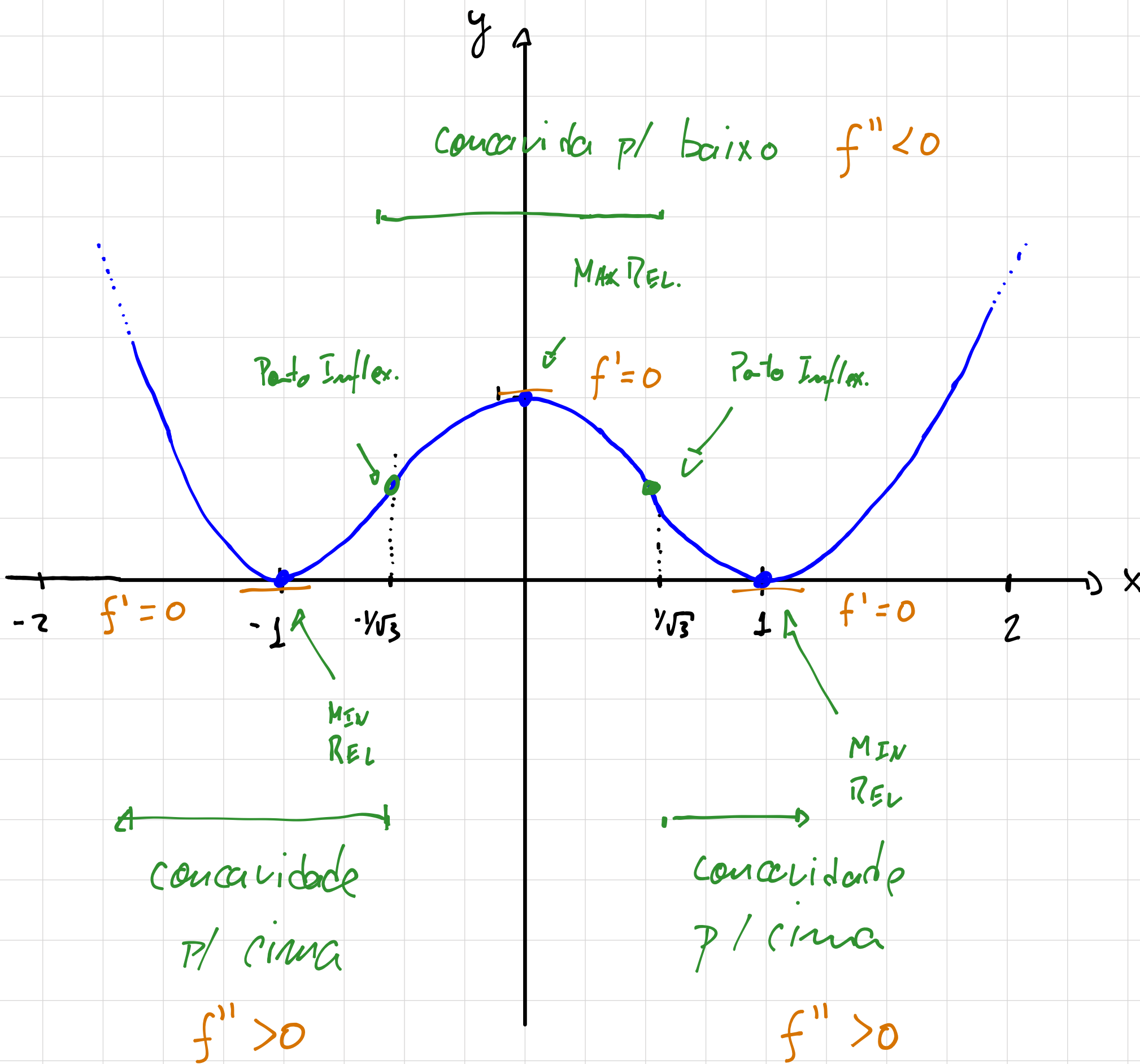
Soluções: $x = 0$, $x = \pm 1$

$$f''(0) = -4 < 0, \quad f''(\pm 1) = 8 > 0$$

$$f(x) = x^3 - 2x^2 + 1$$

Extremos $f(0) = 1$ $M_{\text{Ax. REL}}$

$f(\pm 1) = 0$ $M_{\text{IN. REL}}$



13/4/2021

Exercícios da lista, seção 1 e 2.

① $f(x) = (x-1)^3$ Crescimento: $f'(x) > 0$?

$$f'(x) = 3(x-1)^2 \Rightarrow 3(x-1)^2 > 0 \Rightarrow x \in \mathbb{R}.$$

$$f''(x) = 6(x-1)$$

A função é estritamente crescente.

Concavidade: $f''(x) > 0$ tem concavidade p/cima

$$\Rightarrow 6(x-1) > 0 \Rightarrow x > 1$$

$$f''(x) < 0 \Rightarrow x < 1 \quad \Bigg| \quad f''(x) > 0 \Rightarrow x > 1$$

A função é côncava para $x < 1$ e convexa para $x > 1$.

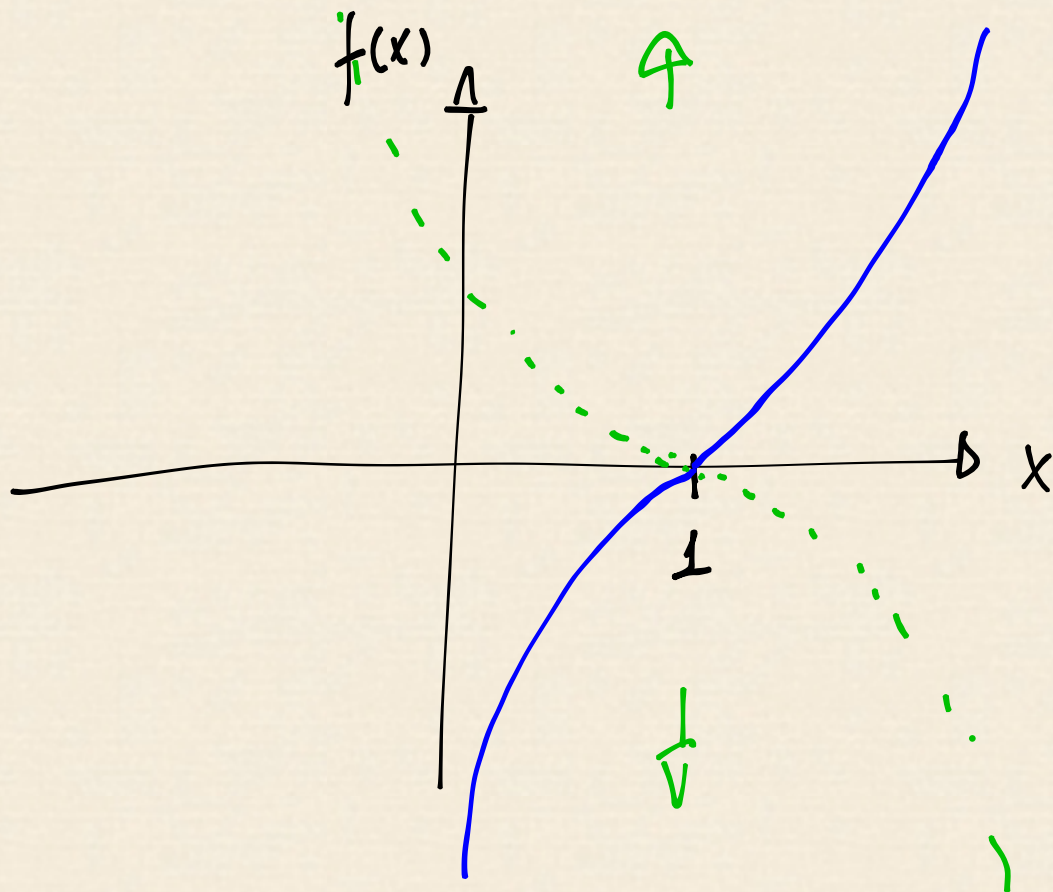
$f''(x)$ troca de sinal em $x=1$, então $x=1$ é ponto de inflexão.

Extremas: $\underbrace{f'(x) = 0}_{\text{candidatos}} \Rightarrow 3(x-1)^2 = 0 \Rightarrow x=1$ é ponto crítico.

Mas pelo critério da derivada 1ª, $x=1$ não é extremo $f'(x) > 0$.

Pelo critério da derivada 2ª: $f''(1) = 6(1-1) = 0$

$\Rightarrow$ inconclusivo.



④ Pontos críticos $f(x) = ax^3 + bx^2 + c$?

f é derivável, então todas pontos críticos são dados por $f'(x) = 0$

$$\Rightarrow f'(x) = 3ax^2 + 2bx = 0 \Rightarrow x(3ax + 2b) = 0$$

$$x_1 = 0 //$$

$$x_2 = -2b/3a //$$

Seção 2, ③ $f(x) = x^4 - 2x^2 + 1$

$$f'(x) = 4x^3 - 4x \rightarrow \text{Candidatos a extremo: } f'(x) = 0$$

$$f''(x) = 12x^2 - 4 \quad \Rightarrow \quad 4x^3 - 4x = 0 \Rightarrow x(x^2 - 1) = 0$$

Pelo critério da derivada 2ª: $x_1 = 0, x_2 = 1, x_3 = -1$

$$f''(0) = -4 \Rightarrow f''(0) < 0 \Rightarrow x=0 \text{ Máximo Relativo.}$$

$$f''(\pm 1) = 12 - 4 = 8 \Rightarrow f''(\pm 1) > 0 \Rightarrow x = \pm 1 \text{ Mínimo Relativo.}$$

Inflexão: $f''(x) > 0$ e $f''(x) < 0$

$$\Rightarrow 12x^2 - 4 > 0$$

$$\sqrt{3x^2} > \sqrt{1}$$

$$\Rightarrow |x| > 1/\sqrt{3}$$

$$-1/\sqrt{3} > x > 1/\sqrt{3}$$

$$12x^2 - 4 < 0$$

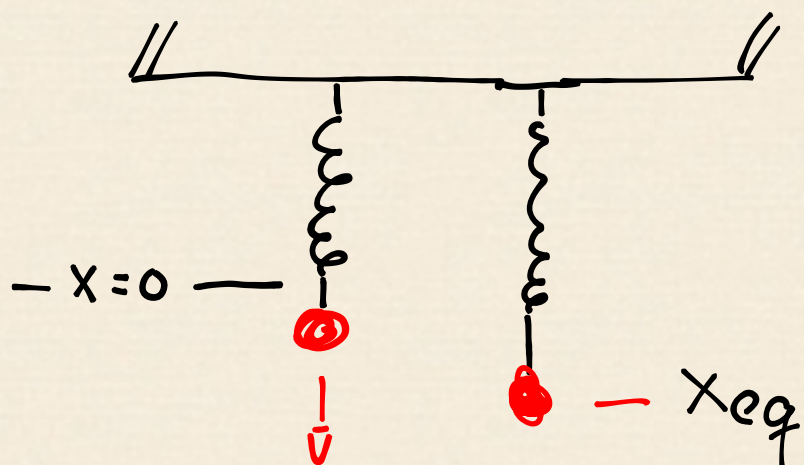
$$|x| < 1/\sqrt{3}$$

$$-1/\sqrt{3} < x < 1/\sqrt{3}$$

Pontos de inflexão: $x = \pm 1/\sqrt{3}$

Otimização

Ex. Minimização de energia



$$\bar{E} = E_{El.} + E_G$$

$$E = \frac{kx^2}{2} - mgx$$

$$\frac{dE(x)}{dx} = 0 \Rightarrow \underbrace{kx}_{-F_c} - \underbrace{mg}_{F_g} = 0 \Rightarrow x_{eq} = \frac{mg}{k}$$

$$\frac{d^2E(x)}{dx^2} = k > 0 \Rightarrow \bar{E}(x_{eq}) \text{ é mínimo da função.}$$

15/4/2021

REGRAS DE L'HÔPITAL

$$\text{Se } \lim_{x \rightarrow c} f(x) = \lim_{x \rightarrow c} g(x) = \begin{cases} 0 \\ +\infty \\ -\infty \end{cases}$$

$$\text{e } \lim_{x \rightarrow c} \frac{f'(x)}{g'(x)} \text{ existe, então}$$

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow c} \frac{f'(x)}{g'(x)}}$$

$$\text{Ex. 2 } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x}{e^x - 1} = \frac{\infty}{\infty}$$

$$\frac{f}{g} = \frac{2x}{e^x - 1}, \quad \frac{f'}{g'} = \frac{2}{e^x}, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2}{e^x} = 2 \lim_{x \rightarrow \infty} e^{-x} = 0 //$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x}{e^x - 1} = 0 //$$

$$\text{Ex. 3 } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\overbrace{x^2 + x - 6}^f}{\underbrace{x^2 - 3x + 2}_g} = \frac{\infty}{\infty} \quad \left| \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x + 1}{2x - 3} = \frac{\infty}{\infty} \right.$$

$$\frac{f'}{g'} = \frac{2x + 1}{2x - 3}, \quad \frac{f''}{g''} = \frac{2}{2} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + x - 6}{x^2 - 3x + 2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x + 1}{2x - 3} = \lim_{x \rightarrow \infty} 1 = 1 //$$

$\curvearrowright$
L'Hop.

$\curvearrowright$
L'Hop.

FÓRMULA DE TAYLOR

$$P_n(x) = f(c) + f'(c)(x-c) + \frac{f''(c)}{2!}(x-c)^2 + \frac{f'''(c)}{3!}(x-c)^3 + \dots + \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-c)^n$$

$P_n(x)$ aproxima $f(x)$ no intorno de $x=c$.

Ex.1 $f(x) = \sin x$, $P_3(x)$ no intorno de $x=0$.

Derivadas

$$f'(x) = \cos(x), \quad f'(0) = 1, \quad f(0) = 0$$

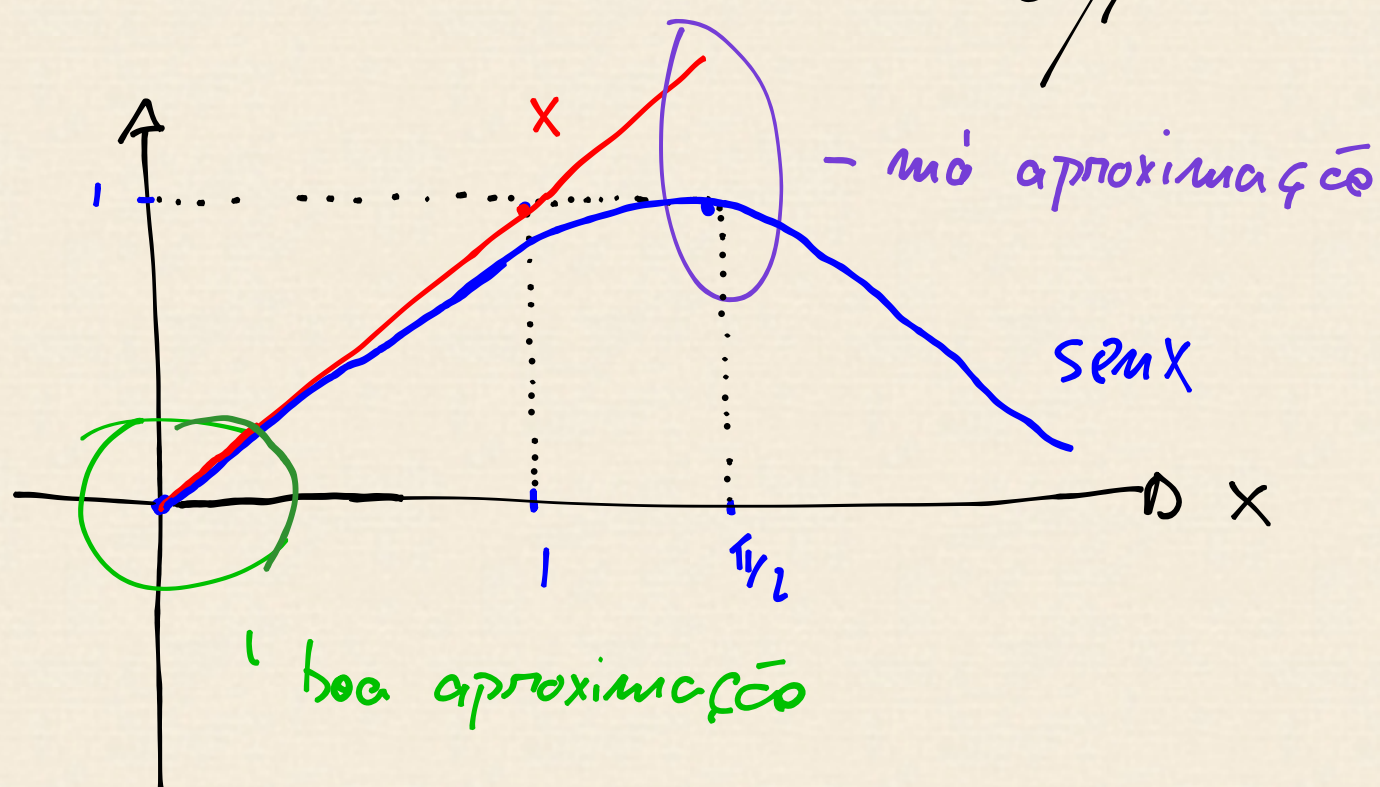
$$f''(x) = -\sin(x), \quad f''(0) = 0$$

$$f'''(x) = -\cos(x), \quad f'''(0) = -1$$

$$f(x) = \sin(x) \simeq P_3(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2 + \frac{f'''(0)}{6}x^3$$

$$\sin(x) \simeq 0 + x + 0 \cdot \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6}$$

$$\sin(x) \simeq x - \frac{x^3}{6}$$



Ex. 2 $f(x) = x^4 - x^3 + x + 1$, $P_4(x)$ no entorno $x = 1$

$$f'(x) = 4x^3 - 3x^2 + 1, \quad f'(1) = 2, \quad f(1) = 2$$

$$f''(x) = 12x^2 - 6x, \quad f''(1) = 6$$

$$f'''(x) = 24x - 6, \quad f'''(1) = 18$$

$$f^{iv}(x) = 24, \quad f^{iv}(1) = 24$$

$$f^v(x) = 0 (!), \quad f^v(1) = 0$$

$$\begin{aligned} f(x) \simeq P_4(x) &= f(1) + f'(1)(x-1) + \frac{f''(1)}{2}(x-1)^2 \\ &\quad + \frac{f'''(1)}{6}(x-1)^3 + \frac{f^{iv}(1)}{24}(x-1)^4 \end{aligned}$$

$$P_4(x) = 2 + 2(x-1) + 3(x-1)^2 + 3(x-1)^3 + (x-1)^4$$

$$\text{Erro: } R_4(x) = \frac{1}{5!} f^{(5)}(\xi)(x-1)^5 = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{f(x) = P_4(x)} \text{ verifique!}$$

$$\text{Fórmula do erro: } R_n = \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi)(x-c)^{n+1}$$

ξ é um número entre x e c .

Exercícios Lista

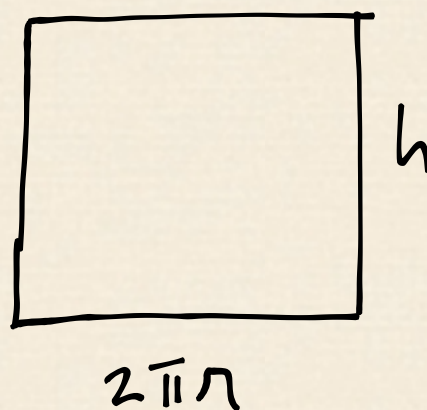
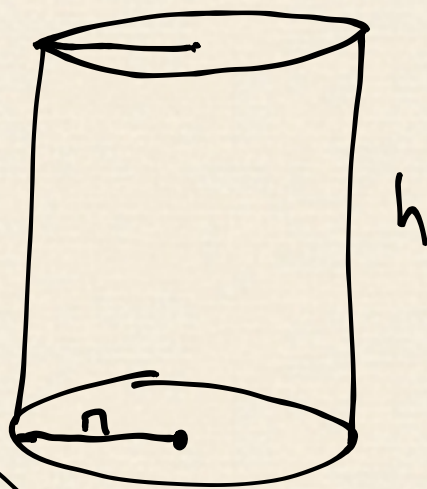
Sec. 3, (2)

$$V = 1L$$

$$V = \boxed{\pi r^2 \cdot h = 1}$$

Superfície

= 2 tampas + "corpo"



$$S(r) = 2(\pi r^2) + 2\pi r h$$

Minimize $S(r)$.

Sec. 4, 2(b)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x^2)}{x} = \frac{0}{0}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x^2)}{x} \xrightarrow{\text{L'Hôpital}} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x \cos(x^2)}{1} = 0 //$$

$$S(r) = 2\pi r^2 + 2\pi r \cdot \frac{1}{\pi r^2}$$

$$\boxed{S(r) = 2\pi r^2 + \frac{2}{r}} \rightarrow$$

Extra: relação com a fórmula de Taylor.

$$f(x) = \sin(x^2) \approx f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2$$

$$\approx 0 + 2x \cos(x^2) \Big|_{x=0} x + \left[2\cos(x^2) - 4x^2 \sin(x^2) \right]_{x=0} \cdot \frac{x^2}{2}$$

$$= 2 \cdot \frac{x^2}{2} = x^2$$

$$\frac{\sin(x^2)}{x} \approx \frac{x^2}{x} = x \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x^2)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} x = 0$$

$$2.1c) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^{2x}}{x^3 + x^2} = \frac{\infty}{\infty}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^{2x}}{x^3 + x^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2e^{2x}}{3x^2 + 2x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4e^{2x}}{6x + 2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{8e^{2x}}{6} = +\infty //$$

→ Minimização de $S(r) = 2\pi r^2 + \frac{2}{r}$

$$\frac{dS}{dr} = 0 \Rightarrow \frac{dS}{dr} = 4\pi r - \frac{2}{r^2} = 0$$

$$\Rightarrow 2\pi r^3 = 1 \Rightarrow r_e = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{1/3}$$

Verificar se $\left. \frac{d^2 S(r)}{dr^2} \right|_{r_e} > 0$.
↓
he?

TESTE 4

① $f(x) = \cos(\sqrt{x^4 + x})$

$$f' = -\sin(\sqrt{x^4 + x}) \frac{d}{dx} \sqrt{x^4 + x} = -\sin(\sqrt{\cdot}) \frac{1}{2} (x^4 + x)^{-1/2} (4x^3 + 1)$$

$$f' = -\sin(\sqrt{x^4 + x}) \frac{1}{2} (x^4 + x)^{-1/2} (4x^3 + 1)$$

② $f'(x) = \frac{d}{dx} [\sin(x+1) \exp(x^{-2} + a)]$

$$f' = \cos(x+1) \exp(x^{-2} + a) + \sin(x+1) \exp(x^{-2} + a) \frac{d}{dx} (x^{-2} + a)$$

$$f' = \cos(x+1) \exp(x^{-2} + a) + \sin(x+1) \exp(x^{-2} + a) (-2) x^{-3}$$

$$\textcircled{3} \quad \frac{d^2}{dx^2} \exp(-2x^2) = \frac{d}{dx} \left[\exp(-2x^2) (-4x) \right]$$

$$= -4 \exp(-2x^2) - 4x (-4x) \exp(-2x^2)$$

$$= 16x^2 \exp(-2x^2) - 4 \exp(-2x^2)$$

$$\textcircled{4} \quad \frac{d}{dx} \left[\ln(y) + y \arctan(x) = 0 \right]$$

$$\frac{1}{y} y' + y' \arctan(x) + y \cdot \frac{1}{1+x^2} = 0$$

$$y' \left(\frac{1}{y} + \arctan(x) \right) = - \frac{y}{1+x^2}$$

$$y' (1 + y \arctan(x)) = \frac{-y^2}{1+x^2}$$

$$y' = \frac{-y^2}{1+x^2} \frac{1}{1+y \arctan(x)} //$$

Lista, Aplic. Sec. 2, (4)

$$f(x) = (x^2 - 3)e^x$$

Candidatos a extremo: $f'(x) = 0$

$$2xe^x + (x^2 - 3)e^x = 0$$

$$f'(x) = \underbrace{e^x [x^2 + 2x - 3]} = 0$$

$$\Rightarrow x^2 + 2x - 3 = 0 \rightarrow x = \frac{1}{2} \left[-2 \pm \sqrt{4 + 12} \right] = \frac{1}{2} (-2 \pm 4)$$

$$x_1 = 1, \quad x_2 = -3$$

Critério da derivada segunda

$$f''(x) = e^x \underbrace{(x^2 + 2x - 3)} + e^x (2x + 2)$$

$$f''(x_1) = e^1 (2 \cdot 1 + 2) > 0 \Rightarrow \underline{x = 1 \text{ é MÍN. REL.}}$$

$$f''(x_2) = e^{-3} (-3 \cdot 2 + 2) < 0 \Rightarrow \underline{x = -3 \text{ é MAX. REL.}}$$

Inflexão: $f''(x) = \underbrace{e^x}_{\downarrow} \underbrace{(x^2 + 4x - 1)}_{\text{define o sinal}}$

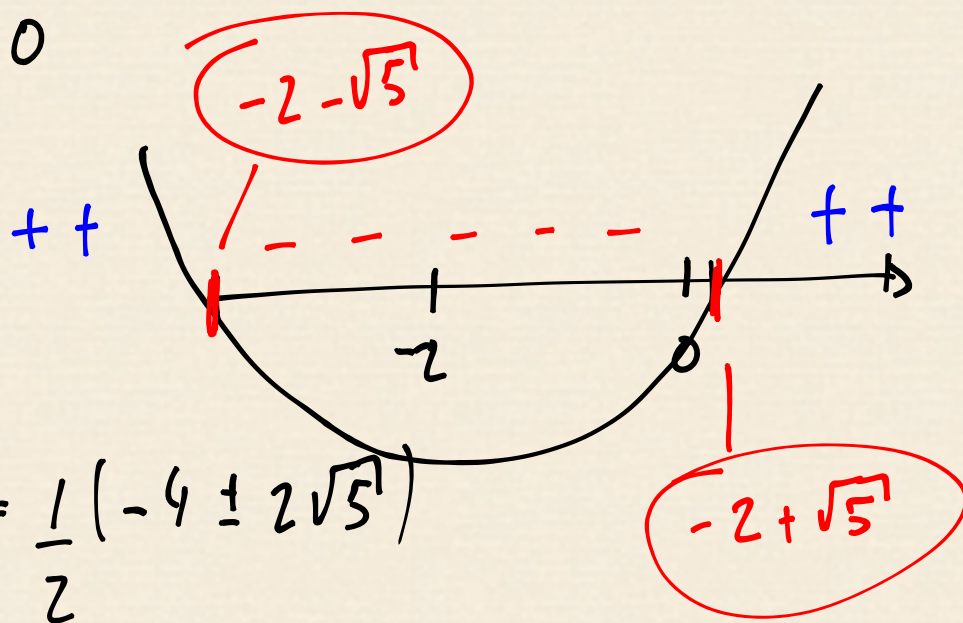
sempre > 0

$$x^2 + 4x - 1 > 0$$

$$x^2 + 4x - 1 = 0$$

$$x = \frac{1}{2} \left[-4 \pm \sqrt{16 + 4} \right] = \frac{1}{2} (-4 \pm 2\sqrt{5})$$

$$x = -2 \pm \sqrt{5}$$



20/4/2021

Exercícios da Lista Aplicação de Derivadas
Seções 4 e 5.

SEC 4

$$(2) (a) \quad L = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{e^x - 1} = \frac{0}{0}$$

$$L = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x}{e^x} = \frac{0}{1} = 0 //$$

↪

L'Hopital

$$(b) \quad L = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x^2)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x \cos(x^2)}{1} = 2 \cdot 0 \cdot 1 = 0 //$$

L'Hop.

$$(c) \quad L = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^{2x}}{x^3 + x^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2e^{2x}}{3x^2 + 2x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4e^{2x}}{6x + 2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{8e^{2x}}{6}$$

L'Hop.

L'Hop.

L'Hop.

$$L = \infty //$$

$$(d) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} x \sin(1/x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin(1/x)}{1/x}$$

SEC. 5

$$(1) (a) \quad e^x \approx \underline{P_4(x)} ?$$

$$P_4(x) = f(c) + f'(c)(x-c) + \frac{f''(c)}{2!}(x-c)^2 + \frac{f'''(c)}{3!}(x-c)^3 + \frac{f^{iv}(c)}{4!}(x-c)^4$$

No entorno de $x=0$, $c=0$.

$$P_4(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \frac{f^{iv}(0)}{4!}x^4$$

$$f(0) = e^0 = 1$$

$$f'(x) = e^x, \quad f'(0) = 1$$

$$f''(x) = e^x, \quad f''(0) = 1$$

$$f'''(x) = e^x, \quad f'''(0) = 1$$

$$f^{iv}(x) = e^x, \quad f^{iv}(0) = 1$$

$$P_4(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} //$$

Uma representação possível de $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$.

$$(b) f(x) = e^{ix}$$

$$f(0) = 1$$

$$f'(x) = i e^{ix}, f'(0) = i$$

$$f''(x) = i^2 e^{ix} = -e^{ix}, f''(0) = -1$$

$$f'''(x) = -i e^{ix}, f'''(0) = -i$$

$$f^{iv}(x) = -i^2 e^{ix} = e^{ix}, f^{iv}(0) = 1$$

$$P_4(x) = 1 + i x - \frac{x^2}{2} - i \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} //$$

Três primeiros termos da série de Taylor do cosseno.

(2) (b) $\sin(x)$, $P_2(x)$, $c = \pi/2$, R_2 no ponto $x = \pi$?

$$R_n = \frac{f^{(n+1)}(z)}{(n+1)!} (x-c)^{n+1} \rightarrow R_2 = \frac{f'''(z)}{6} (x - \pi/2)^3 = \frac{f'''(z)}{6} \left(\pi - \frac{\pi}{2} \right)^3$$

$$\begin{array}{l} f' = \cos x \\ f'' = -\sin x \\ f''' = -\cos x \end{array} \quad \begin{array}{l} R_2(z) = -\frac{\cos(z)}{6} \frac{\pi^3}{8} \text{ máximo entre} \\ \pi/2 < x < \pi \\ \text{No intervalo, } \cos(z) \text{ é máximo em } z = \pi. \end{array}$$

$$R_{2\text{máx}} = \frac{1}{6} \cdot \frac{\pi^3}{8} \approx 0,646$$

$$R_n \propto \frac{1}{(n+1)!} \left(\frac{\pi}{2} \right)^{n+1}$$

$$R_5 \approx 0,021$$

$$(3) x = v/c$$

$$E \rightarrow f(x) = \frac{mc^2}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$v < c, x < 1$$

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + f''(0)\frac{x^2}{2} + \dots$$