

Cálculo 1 – ECT2103
Lista de Exercícios – Limites e Derivadas
Prof. Ronaldo

17 de janeiro de 2022

1 Limites bilaterais

1. $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{(t+h)^2 - t^2}{h}$

2. $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{(t+h)^3 - t^3}{h}$

3. Seja $f(x) = (x^2 + x - 2) / (x^2 - x)$,
calcule:

$$\lim_{x \rightarrow -1} f(x) \text{ e } \lim_{x \rightarrow 1} f(x).$$

4. $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 + 3x + 2}{x^2 - x - 2}$.

5. $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^3 - 2x^2 - 2x - 3}{2x^2 - 4x - 6}$.

6. $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^3 - 7x - 6}{x^3 - 2x^2 - 5x + 6}$.

7. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^4 + 2x^3 - 7x^2 - 20x - 12}{x^3 - 2x^2 - 5x + 6}$.

8. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^4 - 1}{x^3 - 1}$

9. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^{3/2} - 1}{\sqrt{x} - 1}$

10. $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x+2}{\sqrt{x^2+5}-3}$

11. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{sen}(3x)}{2x}$

12. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{sen}(x/3)}{4x}$

13. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{sen}(3x)}{\text{sen}(5x)}$

14. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\text{sen}(x-1)}{\text{sen}(-x+1)}$

15. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{sen}(\text{sen}x)}{\text{sen}x}$

16. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{sen}(\frac{\pi}{2} \cos x)}{\cos x}$

17. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1-\cos x)\text{sen}(1-\cos x)}{1-2\cos x+\cos^2 x}$

18. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(x)-1}{x}$

19. $\lim_{x \rightarrow 0} x^2 \text{sen}(x^{-1})$

2 Limites laterais

1. Seja a função

$$f(x) = \begin{cases} -x & \text{se } x < 0 \\ 1 & \text{se } 0 < x < 1 \\ x^2 & \text{se } x \geq 1 \end{cases}$$

Faça seu gráfico e determine seu domínio e imagem. Determine também

$$\begin{array}{ll} \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) & \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) & \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) \end{array}$$

O que se pode dizer sobre os limites de $f(x)$ nos pontos 0 e 1?

2. Seja a função

$$f(x) = \frac{\sqrt{2x}(x-1)}{|x-1|},$$

determine os seguintes limites:

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x).$$

3. Seja a função

$$f(x) = \frac{|x+2|}{x^2-4},$$

determine os seguintes limites:

$$\lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow -2^-} f(x).$$

4. Seja a função

$$f(x) = \frac{4-x}{x^2-2x-8},$$

determine os seguintes limites:

$$\lim_{x \rightarrow 4^+} f(x) \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow 4^-} f(x).$$

3 Limites no infinito

1. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^2+8x-3}{3x^2+2}$

2. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{11x+2}{2x^3-1}$

3. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x+5}{\sqrt{2x^2-5}}$

4. $\lim_{x \rightarrow 0^-} e^{1/x}$

5. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$

6. $\lim_{x \rightarrow \infty} e^{-x} \sin x$

7. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \cos x \exp\left(\frac{x^3+2x+1}{x^2-x}\right)$

8. $\lim_{x \rightarrow \infty} \exp\left(\frac{x^2+2x+3}{2x^2+x-1}\right)$

4 Limites infinitos e Assíntotas

Para as funções dadas abaixo, faça o gráfico, determinando suas assíntotas e os pontos onde a função cruza os eixos x e y :

1. $f(x) = \frac{2x}{x+1}$

2. $f(x) = \frac{3-x}{x-1}$

3. $f(x) = \frac{-1+x}{-1+3x-2x^2}$

5 Continuidade

1. Seja a função $f(x)$ definida abaixo, determine seu domínio e imagem e faça seu gráfico. Essa função é contínua nos pontos ± 1 e 0 ?

$$f(x) = \begin{cases} -x & \text{se } -1 \leq x < 0 \\ 1 & \text{se } 0 \leq x < 1 \\ x^2 & \text{se } x > 1 \end{cases}$$

2. Seja a função $f(x)$ definida abaixo. Essa função é contínua em $x = -3$?

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2x^2+9x+9}{x+3} & \text{se } x < -3 \\ 3 & \text{se } x = -3 \\ -x^2 - 3x - 3 & \text{se } x > -3 \end{cases}$$

3. Estude a continuidade da função f dada abaixo nos pontos $x = 1$ e $x = 2$.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-1}{x^2+x-2} & \text{se } x < 1 \\ -x^3 + x - 2 & \text{se } 1 \leq x \leq 2 \\ \exp\left(\frac{x^2-4}{x^2-3x+2}\right) & \text{se } x > 2 \end{cases}$$

6 Usando a definição de derivada determine:

1. O ângulo que a reta tangente de $f(x) = 2x^2 - 4x + 5$ em $x = 1$ faz com a horizontal.

2. O ponto onde a derivada da função $f(x) = |2x + 4| + 3$ não existe.

3. O ponto onde a derivada da função

$$f(x) = \begin{cases} 3x - 1 & \text{se } x < 2 \\ 7 - x & \text{se } x \geq 2 \end{cases}$$

não existe.

4. O valor da constante a para que função

$$f(x) = \begin{cases} 3x^2 - x + 2 & \text{se } x < 1 \\ ax - 2 & \text{se } x \geq 1 \end{cases}$$

seja derivável em todo seu domínio.

7 Determine as derivadas das seguintes funções em relação ao seu argumento

1. $f(x) = 5x^4 + 2x^3 - x^2 - 3x + 8$

2. $f(x) = (x^2 + 2)(3 - x)$

3. $f(x) = (x^3 - x^2 + 3)x^{-5}$

4.

$$f(x) = \frac{x^3 - 2x^2}{3x - 8}$$

5.

$$f(x) = \frac{4 - x}{5 - x^2}$$

6.

$$f(t) = \frac{3}{t^4} + \frac{5}{t^5}$$

7.

$$f(x) = \frac{x^4}{x^2 + 2} + \frac{x^3}{x^2 + 2x}$$

8 Regra da Cadeia: determine as derivadas das seguintes funções em relação ao seu argumento

1.

$$f(x) = (x^3 + 2x - 1)^8$$

2.

$$f(s) = 4 \left(\frac{3s^2 + 2s}{2s + 1} \right)^{-2}$$

3.

$$f(t) = \frac{(x^2 + x)^4}{(t^2 + t + 1)^7}$$

4.

$$f(x) = \frac{2\sqrt{x^2 + 3}}{x + 1}$$

5.

$$f(x) = 5^{\sqrt{x^2 + 1}}$$

6.

$$f(x) = \frac{e^{\sqrt{x^2 + 1}}}{x - 1}$$

7.

$$f(a) = \frac{e^{-a^2}}{(1 + a^2)^2}$$

8.

$$f(x) = (x^2 + 1) \exp \left(\frac{x^3 + x^2}{x^2 + 1} \right)$$

9.

$$f(x) = \log_{10} \left(\sqrt{x^2 + 1} \right)$$

10.

$$f(x) = e^{x+1} \log_{10} \left(\frac{x+1}{x} \right)$$

11.

$$f(x) = \ln(x^4 + 2x^2)$$

12.

$$f(x) = \frac{\ln(x^4 + 2x^2)}{4x^3 + 4x}$$

13.

$$f(x) = \exp\left[(1+a)\ln(\sqrt{x^3+x})\right]$$

14.

$$f(x) = \ln\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}\right)$$

15.

$$f(x) = \cos\left(\frac{x^4}{4}\right)$$

16.

$$f(x) = \cos(\text{sen}(x^2))$$

17.

$$f(x) = \text{sen}(e^{-x} \cdot x^2)$$

18.

$$f(t) = \text{tg}(t^2) \cdot \ln(2t+x)$$

19.

$$f(x) = \text{cosec}\left(\frac{x+1}{x-1}\right)$$

20.

$$f(z) = \exp(\text{sen}(z^2))$$

21.

$$f(x) = \text{sec}\left(\frac{\sqrt{x^2+x}}{x^2}\right)$$

22.

$$f(x) = \text{senh}(x^2 + x^4)$$

23.

$$f(x) = \text{cosh}(x^2 \ln(x^2))$$

24.

$$f(x) = \text{arcsen}\left(\frac{1}{2+x}\right)$$

25.

$$f(x) = \text{arctg}\left(\frac{x^2}{2+x}\right)$$

26.

$$f(x) = \text{arccosec}(x^2 e^{-x/2})$$

9 Dadas as funções abaixo, determine suas derivadas, em relação ao seu argumento, até segunda ordem.

1.

$$f(t) = x_0 + v_0 t + \frac{a_0}{2} t^2$$

2.

$$f(t) = x_0 \text{sen}(wt + a)$$

3.

$$f(t) = x_0 \text{cos}(wt + a) e^{-wt}$$

4.

$$x(t) = \frac{x_0}{2} + v_0(t - t_0) + \frac{x_0}{2} e^{-(t-t_0)/t_0}$$

5.

$$f(x) = \exp\left(\frac{-x^2}{2s}\right)$$

10 Dadas as funções y definidas implicitamente abaixo, encontre y'

1. $y^2 + x^2 = 2$

2. $xy^2 + 2y^3 = x - 2y$

3. $y^3 = \frac{x-y}{x+y}$

4. $e^y = x + y$

5. $a \text{sen}^2(x + y) = b$