

Álgebra Linear,  
Teste 1, Unidade 3.  
16/07/2024.  
Prof. Ronaldo.

July 16, 2024

1. Considere operadores descritos por matrizes reais do tipo

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & a \end{pmatrix}.$$

(A) Determine a condição sobre os parâmetros  $a, b, c$  para que o operador seja auto-adjunto.

(B) Mostre que, sob essa condição, os auto-valores do operador são sempre reais.

2. Mostre que não possível uma matriz real do tipo

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ b & 1 & 0 \\ 0 & a & a \end{pmatrix}$$

representar um operador ortogonal.

Soluções:

1. (A) Para que o operador seja auto adjunto, a matriz precisa ser simétrica, logo  $c = b$ .  
(B) Os auto-valores da matriz são dados por

$$\det \begin{pmatrix} a - \lambda & b \\ b & a - \lambda \end{pmatrix} = (a - \lambda)^2 - b^2 = 0.$$

Resolvendo para  $\lambda$ , temos

$$\lambda^2 - 2a\lambda + a^2 - b^2 = 0$$

$$\lambda = \frac{1}{2} \left[ 2a \pm \sqrt{4a^2 - 4a^2 + 4b^2} \right]$$

$$\lambda = \frac{1}{2} [2a \pm 2|b|] ,$$

que sempre tem soluções reais.

2. Para que o operador seja ortogonal, precisamos ter

$$AA^T = I.$$

Então

$$\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ b & 1 & 0 \\ 0 & a & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} a^2 & ab & 0 \\ ab & 1 + b^2 & a \\ 0 & a & 2a^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Como se vê, o elemento 11 requer  $a = 1$ . Mas isso fixa os elementos 23 e 32 também a valer 1, o que não satisfaz a equação. Logo a matriz não pode ser ortogonal.