ESCOLA DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA – UFRN
PROVA 2 DE ÁLGEBRA LINEAR – ECT 2202 – Turma 3
04/07/2024

Prof. Ronaldo Batista

Nome Legível:____

Assintatura:____

Instruções:

1. **Leia todas as instruções antes de qualquer outra coisa.**
2. **A resolução das questões pode ser feita com grafite.**
3. **Faça uma prova organizada e detalhada, apresentando as respostas de forma coerente, de modo que todas as justificativas relevantes no contexto da disciplina devem estar presentes na solução. Indique bem o que você está fazendo pois resultados sem explicação e/ou desorganizados não serão considerados.**
4. **Resolva cada questão na frente e/ou verso da folha onde ela se encontra.**
5. **Folhas com idicadas como de rascunho não serão corrigidas.**

Q1	
Q2	
Q3	
Q4	

Questão 1 (4 pontos).

Para as matrizes das TLs $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, com n de acordo com a dimensão das matrizes, expressas na base canônica dadas abaixo, determine, uma base de autovetores:

(a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ (1,5 ponto)

(b) $\begin{pmatrix} 3 & 0 & -4 \\ 0 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ (2,5 ponto)

Soluções:

(a) O polinômio característico da matriz é

$$\lambda^2 - 2\lambda - 3 = 0\,,$$

cujas soluções são

$$\lambda = -1,\, 3\,.$$

Os autovetores associados são $v_1 = (1, 1)$ e $v_2 = (-1, 1)$, que formam uma base de $\mathbb{R}^2$.

(b) O polinômio característico da matriz é

$$(3 - \lambda)^2\,(-1 - \lambda) = 0\,,$$

que tem as seguintes soluções $\lambda \in \{-1, 3\}$. O autovalor $\lambda = -1$ tem o seguinte autovetor

$$v_1 = (4, -5, 4)\ .$$

Já o autovalor repetido $\lambda = 3$, tem o autovetor do tipo $u = (x, y, 0)$, que pode ser decomposto em outros dois:

$$u = x\,(1, 0, 0) + y\,(0, 1, 0)\ .$$

Portanto, a base de autovetores da TL é:

$$B = \{(1, 0, 0)\,, (0, 1, 0)\,, (4, -5, 4)\}\ .$$

Questão 2 (valor 3 pontos).

Considere a seguinte base do $\mathbb{R}^2$, $B = \{(3,4), (-1,2)\}$. Usando o processo de Gram-Schmidt para esses vetores, encontre uma base ortogonal. Considere o produto interno usual.

Solução:

Sejam $v_1 = (3,4)$ e $v_2 = (-1,2)$; v_1'e v_2' os vetores da base ortogonal a ser determinada. Vamos escolher

$$v_1' = v_1 \,,$$

então

$$v_2' = v_2 - \langle v_2, \hat{v}_1' \rangle \hat{v}_1' \,.$$

Temos

$$\hat{v}_1' = \frac{v_1'}{|v_1'|} = \frac{1}{5}(3,4) \ .$$

Para v_2', temos

$$v_2' = (-1,2) - \left[(-1,2) \cdot \frac{1}{5}(3,4)\right] \frac{1}{5}(3,4)$$

$$v_2' = (-1,2) - [-3+8] \frac{1}{25}(3,4)$$

$$v_2' = (-1,2) - \frac{1}{5}(3,4)$$

$$v_2' = \frac{1}{5}(-8,6) \ .$$

Questão 3 (3 pontos).

Considerando o seguinte produto interno de vetores do espaço $P_1(\mathbb{R})$,

$$\langle u, v\rangle = \int_0^1 u(x)\, v(x)\, dx\,,$$

determine, se possível, os valores de a e b para que os vetores $u = a$ e $v = bx$ formem uma base:
(a) normal (1,5 ponto)
(b) ortogonal (1,5 ponto)

Solução:
(a) Para que a base seja normal, precisamos de

$$|u| = |v| = 1\,.$$

Para u temos

$$|u|^2 = \langle u, u\rangle = \int_0^1 a^2 dx = a^2\,,$$

então

$$a^2 = 1 \rightarrow a = \pm 1\,.$$

Para v temos

$$|v|^2 = \langle v, v\rangle = \int_0^1 (bx)^2\, dx = \left[b^2 \frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{b^2}{3}\,,$$

$$b^2/3 = 1 \rightarrow b = \pm\sqrt{3}\,.$$

(b) Para que a base seja ortogonal, precisamos de

$$\langle v, u\rangle = 0\,.$$

Temos que

$$\langle v, u\rangle = \int_0^1 abx dx = \left[ab\frac{x^2}{2}\right]_0^1 = \frac{ab}{2} = 0\,.$$

Então devemos ter $a = 0$ ou $b = 0$, mas isso tornaria um dos vetores nulos. Portanto não é possível tornar essa base ortogonal com esses tipos de vetores.