ESCOLA DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA – UFRN
PROVA 1 DE ÁLGEBRA LINEAR – ECT 3202 – Turma 3
09/04/2024

Prof. Ronaldo Batista

Nome Legível:____

Assintatura:____

Instruções:

1. **Leia todas as instruções antes de qualquer outra coisa.**
2. **A resolução das questões pode ser feita com grafite.**
3. **Faça uma prova organizada e detalhada, apresentando as respostas de forma coerente, de modo que todas as justificativas relevantes no contexto da disciplina devem estar presentes na solução. Indique bem o que você está fazendo pois resultados sem explicação e/ou desorganizados não serão considerados.**
4. **Resolva cada questão na frente e/ou verso da folha onde ela se encontra.**
5. **Folhas com idicadas como de rascunho não serão corrigidas.**

Q1	
Q2	
Q3	
Q4	

Questão 1 (valor 2 pontos).

Determine se o conjunto $W = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | y = 2x, z = -x + 1\right\}$ é subespaço de $\mathbb{R}^3$.

Solução:
No conjunto W devemos ter elementos $(x, 2x, -x + 1)$. Um condição para que W seja subconjuto $\mathbb{R}^3$, é que W contenha o vetor nulo. Então devemos ter

$$(x, 2x, -x + 1) = (0, 0, 0) \ ,$$

como vemos não exite x real que satisfaça a equação, portanto W não é subespaço de $\mathbb{R}^3$.

Questão 2 (valor 3 pontos).

Determine os valores $\alpha \in \mathbb{R}$ para que o conjunto dado abaixo seja base do espaço $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$:

$$B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

Solução:
Para que o conjunto B seja base e precisa ser LI e gerar todo o espaço $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$. Para ser LI, as CLs dos elementos precisam satisfazer:

$$a \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + d \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

somente com $a = b = c = d = 0$. Temos

$$\begin{pmatrix} a + \alpha c & b \\ d & \alpha a + d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

então imediatamente temos $b = d = 0$ e precisamos encontrar α tal que:

$$a + \alpha c = 0$$

e

$$\alpha a + c = 0\,.$$

Das duas equações podemos escrever:

$$a\left(1 - \alpha^2\right) = 0$$

Que implica que $a = 0$ somente se $1 - \alpha^2 \neq 0$, então devemos ter $\alpha \neq \pm 1$. Nesse caso, como $c = -\alpha a$, se $a = 0$, também temos $c = 0$.

Os elementos de $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$,

$$\begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix}$$

podem ser todos gerados pelas CLs

$$a \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + d \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a + c\alpha & b \\ c & a\alpha + c \end{pmatrix}$$

com a devida restrição de α.

Questão 3 (2 pontos).

Determine a matriz de mudança entre as bases do $\mathbb{R}^2$ $B = \{(1,0), (0,1)\}$ e $C = \{(1,1), (-1,0)\}$ e usando essa matriz, determine as coordenadas do vetor $v_B = (2,2)^T$ na base C.

Solução:
Queremos encontrar a matriz T_{CB} tal que

$$X_C = A_{BC} X_B \,,$$

onde X_B são as coordenadas em relação à base B e X_C em relação à B

$$A_{BC} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}^T$$

onde

$$(1,0) = a_{11}\,(1,1) + a_{12}\,(-1,0)$$

$$(0,1) = a_{21}\,(1,1) + a_{22}\,(-1,0)$$

Resolvendo essas equações, temos

$$A_{BC} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Assim temos

$$X_C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix},$$

o que pode ser verificado com $(2,2) = 2\,(1,1) + 0\,(-1,0)$.

Questão 4 (3 pontos).

Determine o núcleo e image da seguinte TL $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, (x, y, z) \mapsto (x + y, y + z, z + x)$

Solução:

O núcleo da TL é o conjunto de vetores do domínio tais que $F(v) = o$, então procuramos vetores tais que

$$(x + y, y + z, z + x) = (0, 0, 0) \ ,$$

cuja solução é $x = y = z = 0$. Portanto $\ker(F) = \{o\}$.

A imagem da TL é o conjunto de vetores da imagem $F(v)$, os quais podem ser expressos na forma

$$(x + y, y + z, z + x) = x(1, 0, 1) + y(1, 1, 0) + z(0, 1, 1) \ ,$$

então $\mathrm{Im}(F) = \{(1, 0, 1), (1, 1, 0), (0, 1, 1)\}$.