

Ex. diagonalização de TL.

Seja a TL dada pela matriz na base canônica:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -4 \\ 0 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Seus autovalores são dados por

$$\det(A - \lambda I) = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} 3-\lambda & 0 & -4 \\ 0 & 3-\lambda & 5 \\ 0 & 0 & -1-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow (3-\lambda)(3-\lambda)(-1-\lambda) = 0$$

soluções: $\lambda = 3$ e $\lambda = -1$.

Para $\lambda = 3$, temos o autovetor

$$A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 3 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 3x - 4z = 3x \\ 3y + 5z = 3y \\ -z = 3z \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -4z = 0 \\ 5z = 0 \\ -z = 3z \end{cases} \Rightarrow z = 0$$

$$\text{AVE: } u_1 = \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{Para } \lambda = -1, \text{ temos } \begin{cases} 3x - 4z = -x \\ 3y + 5z = -y \\ -z = -z \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3x - 4z = -x \\ 3y + 5z = -y \\ -z = -z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4x = 4z \\ 4y = -5z \end{cases}, z \text{ livre.}$$

AVE: $u_2 = \begin{pmatrix} z \\ -5z/4 \\ z \end{pmatrix}$

Note que podemos decompor:

$$u_1 = x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

então o autovalor $\lambda = 3$ tem 2 autovetores associados.

Tomando $z = 4$ para u_2 , temos a seguinte base

$$B = \left\{ \overbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}^{v_1}, \overbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}^{v_2}, \overbrace{\begin{pmatrix} 4 \\ -5 \\ 4 \end{pmatrix}}^{v_3} \right\}$$

A forma diagonal de A , isto é, a matriz da TL na base de autovetores é

$$A_B = \text{diag}(\lambda_i) \text{ ou}$$

$$A_B = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

EXEMPLOS PRODUTO INTERNO

- ① Sejam $u = 1 + \alpha x$ e $v = x$ vetores do espaço $P_1(\mathbb{R})$, com produto interno dado por

$$\langle u, v \rangle = \int_0^1 u(x) v(x) dx.$$

Determine $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que u e v sejam ortogonais.

Solução: Queremos $\langle u, v \rangle = 0$.

$$\begin{aligned} \langle u, v \rangle &= \int_0^1 (1 + \alpha x) x dx = \int_0^1 (x + \alpha x^2) dx \\ &= \left[\frac{x^2}{2} + \alpha \frac{x^3}{3} \right]_0^1 = \frac{1}{2} + \frac{\alpha}{3} = 0 \Rightarrow \boxed{\alpha = -\frac{3}{2}} // \end{aligned}$$

- ② Determine uma base ortogonal do espaço $P_1(\mathbb{R})$.

Vamos escolher $u = 1$ e $v = \alpha + \beta x$. Queremos

$$\langle u, v \rangle = 0 \Rightarrow \int_0^1 u v dx = \int_0^1 (\alpha + \beta x) dx = 0$$

$$\Rightarrow \left[\alpha x + \frac{\beta x^2}{2} \right]_0^1 = \alpha + \frac{\beta}{2} = 0 \Rightarrow \alpha = -\frac{\beta}{2}.$$

Ou seja, dada uma escolha de β , α fica determinado (ou vice-versa). Por exemplo, para $\beta = 1$

$$u = 1 \text{ e } v = -\frac{1}{2} + x \text{ é base ortogonal.}$$

EXEMPLOS DO ORTOGONALIZAÇÃO DE BASES.

① Seja a base do $\mathbb{R}^2$ $\{(3,4), (-1,2)\}$. Determine a base ortogonal associada.

Solução: Sejam v_1' e v_2' as vetores ortogonais a serem determinados. Tomando $v_1' = (3,4)$, temos

$$v_2' = v_2 - \langle v_2, \hat{v}_1' \rangle \hat{v}_1'$$

$$\hat{v}_1' = \frac{v_1'}{|v_1'|} = \frac{(3,4)}{\sqrt{(3,4) \cdot (3,4)}} = \frac{(3,4)}{\sqrt{25}} = \frac{1}{5} (3,4)$$

$$v_1' = \frac{1}{5} (3,4)$$

$$\langle v_2, \hat{v}_1' \rangle = (-1,2) \cdot \frac{1}{5} (3,4) = \frac{1}{5} (-3+8) = 1$$

$$v_2' = (-1,2) - 1 \cdot \frac{1}{5} \cdot (3,4) = \left(\frac{-5-3}{5}, \frac{10-4}{5} \right)$$

$$v_2' = \left(-\frac{8}{5}, \frac{6}{5} \right) //$$

$$\text{Base ortogonal } \left\{ (3,4), \left(-\frac{8}{5}, \frac{6}{5} \right) \right\} //$$

$$\begin{aligned} \text{Verificando: } \langle v_1', v_2' \rangle &= \frac{1}{5} (3,4) \cdot (-8,6) \\ &= \frac{1}{5} (-24+24) = 0 \end{aligned}$$

② Partindo da base $\{1, 1+x\}$ do espaço $P_2(\mathbb{R})$, determine uma base ortogonal segundo o produto interno

$$\langle u, v \rangle = \int_{-1}^1 uv \, dx.$$

Solução:

Sejam $v_1 = 1$, $v_2 = 1+x$. Vamos tomar

$$v_1' = v_1 \quad \text{e} \quad v_2' = v_2 - \langle v_2, \hat{v}_1' \rangle \hat{v}_1'$$

$$\hat{v}_1' = \frac{v_1'}{|v_1'|}, \quad |v_1'|^2 = \int_{-1}^1 v v \, dx = \int_{-1}^1 (1+x)^2 \, dx$$

$$|v_1'|^2 = \int_{-1}^1 dx (1 + 2x + x^2) = \left[x + x^2 + \frac{x^3}{3} \right]_{-1}^1$$

$$|v_1'|^2 = 1 + 1 + \frac{1}{3} - \left(-1 + 1 - \frac{1}{3} \right) = 2 + \frac{2}{3} = \frac{8}{3}$$

$$\Rightarrow |v_1'| = \sqrt{8/3} \quad \Rightarrow \quad \hat{v}_1' = \frac{1}{\sqrt{8/3}} (1+x).$$

$$\langle v_2, \hat{v}_1' \rangle = \frac{1}{\sqrt{8/3}} \int_{-1}^1 1 \cdot (1+x) \, dx = \frac{1}{\sqrt{8/3}} \left[x + \frac{x^2}{2} \right]_{-1}^1$$

$$\langle v_2, \hat{v}_1' \rangle = \frac{1}{\sqrt{8/3}} \left[1 + \frac{1}{2} - \left(-1 + \frac{1}{2} \right) \right] = \frac{2}{\sqrt{8/3}}$$

$$v_2' = v_2 - \langle v_2, \hat{v}_1' \rangle \hat{v}_1'$$

$$= 1 - \frac{2}{\sqrt{8/3}} \cdot \frac{1}{\sqrt{8/3}} (1+x)$$

$$= 1 - \frac{2}{8/3} (1+x) = 1 - \frac{3}{4} - \frac{3}{4}x = \frac{1}{4} - \frac{3}{4}x$$

$$v_2' = \frac{1}{4}(1-3x) \quad \text{Base Ortogonal} \left\{ 1+x, \frac{1}{4}(1-3x) \right\}.$$

Verificando a ortogonalidade

$$\langle v_2', v_1' \rangle = \int_{-1}^1 \frac{(1-3x)(1+x)}{4} dx = \frac{1}{4} \int_{-1}^1 (1-2x-3x^2) dx$$

$$\langle v_2', v_1' \rangle = \frac{1}{4} \left[x - x^2 - x^3 \right]_{-1}^1 = \frac{1}{4} \left[1 - 1 - 1 - (-1 - 1 + 1) \right] = 0 \quad \checkmark$$

Exercício do TESTE BÔNUS

Determine os autovalores e autovetores da TL representada por $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Os autovalores são dados por

$$\det(A - \lambda I) = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & -1 \\ 0 & 1-\lambda & 1 \\ 0 & 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow (1-\lambda)^3 - (1-\lambda) = 0$$

$$\Rightarrow (1-\lambda) [(1-\lambda)^2 - 1] = 0 \Rightarrow (1-\lambda) [1 - 2\lambda + \lambda^2 - 1] = 0$$

$$\Rightarrow (1-\lambda)(\lambda^2 - 2\lambda) = (1-\lambda)\lambda(\lambda - 2) = 0$$

Soluções: $\lambda = 0, 1, 2$

AV para $\lambda = 0$: $Av = 0$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x - z = 0 \\ y + z = 0 \\ y + z = 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow x = z$ então os AVs são do tipo

$$y = -z$$

$$v = \begin{pmatrix} z \\ -z \\ z \end{pmatrix} = z \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$AV \text{ para } \lambda=1: \quad Av = v$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x - z = x \\ y + z = y \\ y + z = z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -z = 0 \\ z = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

$$\text{Então } v = \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} //$$

$$AV \text{ para } \lambda=2: \quad Av = 2v$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x - z = 2x \\ y + z = 2y \\ y + z = 2z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -z \\ y = z \\ y = z \end{cases}$$

$$\text{Então } v = \begin{pmatrix} -z \\ z \\ z \end{pmatrix} = z \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} //$$