Resoluções de Exemplos

17 de abril de 2019

1 Produto interno

1. Seja o espaço $P_1(\mathbb{R})$, determine o resultado geral do seguinte produto interno:
$$\langle u, v\rangle = \int_0^1 u(x)\, v(x)\, dx\,.$$

Dois vetores gerais são
$$u = a + bx$$
e
$$v = c + dx$$
Então:
$$\langle u, v\rangle = \int_0^1 u(x)\, v(x)\, dx = \int_0^1 \left(ac + (ad + cb)\, x + bdx^2\right) dx$$
$$\langle u, v\rangle = \left[acx + (ad + cb)\,\frac{x^2}{2} + bd\frac{x^3}{3}\right]_0^1$$
$$\langle u, v\rangle = ac + \frac{1}{2}(ad + cb) + \frac{1}{3}bd$$

2. Sejam $u = (\alpha, 0, -3)$ $v = (2, 2, -1)$, determine α para que u e v sejam ortogonais.

$$\langle u, v\rangle = 2\alpha + 0 + 3 = 0$$
$$\alpha = -\frac{3}{2}$$

3. Sejam $u = 1 + \alpha x$ e $v = x$, determine α para que u e v sejam ortogonais segundo o produto interno
$$\langle u, v\rangle = \int_0^1 u(x)\, v(x)\, dx$$

$$\langle u, v\rangle = \int_0^1 \left(x + \alpha x^2\right) dx = \left[\frac{x^2}{2} + \alpha\frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{1}{2} + \frac{\alpha}{3} = 0$$

$$\alpha = -\frac{3}{2}$$

4. Considerando o espaço $P_1(\mathbb{R})$, determine uma base ortogonal segundo o seguinte produto interno

$$\langle u, v\rangle = \int_0^1 u(x)\, v(x)\, dx\,.$$

---Vamos

iniciar com o vetor $u = 1$ e determinar $v = a + bx$ que seja ortogonal a u. Então precisamos:

$$\langle u, v\rangle = \int_0^1 (a + bx)\, dx = a + \frac{1}{2}b = 0\,,$$

ou seja, para o vetor v necessitamos

$$b = -2a\,,$$

então qualquer vetor do tipo $v = a(1 - 2x)$, com $a \neq 0$, será ortogonal a u e formará uma base.

5. Usando o produto interno, determine as coordenadas de um vetor (a, b) na base $\{(1, 1), (-1, 1)\}$.

---As

coordenadas do vetor $v = (a, b)$ são dadas por:

$$x_i = \frac{\langle v, u_i\rangle}{\langle u_i, u_i\rangle}\,,$$

onde v_i são os vetores da base. Então temos

$$x_1 = \frac{(a, b)\cdot(1, 1)}{(1, 1)\cdot(1, 1)} = \frac{a + b}{2}$$

e

$$x_2 = \frac{(a, b)\cdot(-1, 1)}{(-1, 1)\cdot(-1, 1)} = \frac{a - b}{2}\,.$$

6. Na base de $P_1(\mathbb{R})$ encontrada anteriormente (Ex. 4), determine as coodenadas de um vetor $u = a + bx$.oduto interno

$$\langle u, v\rangle = \int_0^1 u(x)\, v(x)\, dx\,.$$

Vamos tomar a seguinte base: $v = 1$ e $w = 1 - 2x$, então temos

$$x_1 = \frac{\langle u, v \rangle}{\langle v, v \rangle} = \frac{\int_0^1 (a + bx)\, dx}{\int_0^1 dx} = a + \frac{b}{2}$$

e

$$x_2 = \frac{\langle u, w \rangle}{\langle w, w \rangle} = \frac{\int_0^1 (a + bx)(1 - 2x)\, dx}{\int_0^1 (1 - 2x)^2\, dx} = \frac{-b/6}{1/3} = -\frac{b}{2}$$

7. Calcule a norma do vetor $v = a + bx$.

A norma é dada por

$$|v| = \sqrt{\langle v, v \rangle}\,,$$

$$\langle v, v \rangle = \int_0^1 (a + bx)^2\, dx = a^2 + ab + \frac{b^2}{3}\,,$$

$$|v| = \sqrt{a^2 + ab + \frac{b^2}{3}}\,.$$

8. Para o vetor $v = a + bx$, determine $\hat{v}$.

O vetor unitário é dado por

$$\hat{v} = \frac{v}{|v|}\,,$$

então

$$\hat{v} = \frac{a}{\sqrt{a^2 + ab + \frac{b^2}{3}}} + \frac{bx}{\sqrt{a^2 + ab + \frac{b^2}{3}}}\,.$$