Álgebra Linear – ECT2202

Prof. Ronaldo Carlotto Batista

26 de março de 2024

AVISO

O propósito fundamental destes slides é servir como um guia para as aulas. Portanto eles não devem ser entendidos como referência de texto didático. O assunto aqui apresentado pode ser encontrado em detalhes nos livros indicados como bibliografia do curso

Vetores "Geométricos"

- No curso de VGA o conceito de vetor foi introduzido como um segmento orientado de reta no espaço euclidiano, tendo as seguintes propriedades:

1. Módulo ou Magnitude
2. Direção
3. Sentido

Vetores "Geométricos"

- No curso de VGA o conceito de vetor foi introduzido como um segmento orientado de reta no espaço euclidiano, tendo as seguintes propriedades:

1. Módulo ou Magnitude
2. Direção
3. Sentido

- Esses vetores têm invariância por translação e podem ser transportados a qualquer ponto do espaço mantendo suas propriedades.

Vetores "Geométricos"

- Em VGA, representávamos um vetor no $\mathbb{R}^3$ da seguinte forma:

$$\vec{v} = (a, b, c) = a\hat{i} + b\hat{j} + c\hat{k}\,,$$

com $a, b, c \in \mathbb{R}$.

- Em AL, podemos representar o mesmo tipo de vetor como uma matriz linha ou coluna:

$$\vec{v} = (a, b, c) = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}.$$

Definição de Espaço Vetorial

- Veremos que vetores são mais genéricos que os "vetores geométricos", então daqui em diante omitiremos as setas para identificá-los.
- Um espaço vetorial real é um conjunto V não vazio com duas operações:

1. Soma: $V \times V \xrightarrow{+} V$
2. Multiplicação por escalar: $\mathbb{R} \times V \xrightarrow{*} V$
   tais que, para quaisquer vetores $u, v, w \in V$ e escalares $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ as seguintes propriedade são satisfeitas:
   1. $(u + v) + w = u + (v + w)$
   2. $u + v = v + u$
   3. $\exists$ um vetor nulo $o \in V$, tal que $u + o = u$
   4. $\exists$ um vetor $-u \in V$, tal que $u - u = o$
   5. $\alpha (u + v) = \alpha u + \alpha v$
   6. $(\alpha + \beta) u = \alpha u + \beta u$
   7. $(\alpha\beta) u = \alpha (\beta u)$
   8. $1u = u$

Exemplos de Espaço Vetorial

- Verifique que $V = \{\vec{u} = (u_1, u_2) \,|\, u_1, u_2 \in \mathbb{R}\}$ com soma dada por
$$(u_1, u_2) + (v_1, v_2) = (u_1 + v_1, u_2 + v_2)$$
e a multiplicação por um escalar $\alpha \in \mathbb{R}$ por
$$\alpha\,(u_1, u_2) = (\alpha u_1, \alpha u_2)$$
é um EV.

Exemplos de Espaço Vetorial

- Mostre que $V = \{u = (u_1, u_2) \,|\, u_1, u_2 \in \mathbb{R}\}$ com soma dada por
$$(u_1, u_2) + (v_1, v_2) = \left((u_1 + v_1)^2, (u_2 + v_2)^2\right)$$
e a multiplicação por um escalar $\alpha \in \mathbb{R}$ por
$$\alpha (u_1, u_2) = (\alpha u_1, \alpha u_2)$$
não é EV.

Exemplos de Espaço Vetorial

- Verifique que $V = \left\{ A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \right\}$ com soma dada por

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} \end{pmatrix}$$

e multiplicação por escalar α

$$\alpha \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha a_{11} & \alpha a_{12} \\ \alpha a_{21} & \alpha a_{22} \end{pmatrix}$$

é um EV.

Exemplos de Espaço Vetorial

- Espaço $\mathbb{R}^n$: $V = \{(a_1, a_2, ..., a_n)\}$ com soma e multiplicação por escalar usuais.
- Espaço Complexo $\mathbb{C}^n$: $V = \{(a_1, a_2, ..., a_n), a_i \in \mathbb{C}\}$ com soma e multiplicação por escalar $\alpha \in \mathbb{C}$ segundo as regras usuais dos complexos.
- Espaço dos Polinômios: sejam $P_n(\mathbb{R})$ os polinômios reais até ordem n, com $n \geq 0$ e inteiro; o conjunto de todos polinômios com as operações usuais de soma de polinômios e multiplicação por escalar é um EV.

Subespaços Vetoriais

Seja V um espaço vetorial real, $W \subset V$ é um subespaço de W se

1. $o \in W$
2. $\forall u, v \in W, u + v \in W$
3. $\forall \alpha \in \mathbb{R}, \forall u \in W, \alpha u \in W$

Os subespaços $\{o\}$ e V são subespaços ditos triviais de V.

Subespaços Vetoriais

Seja V um espaço vetorial real, $W \subset V$ é um subespaço de W se

1. $o \in W$
2. $\forall u, v \in W, u + v \in W$
3. $\forall \alpha \in \mathbb{R}, \forall u \in W, \alpha u \in W$

Os subespaços $\{o\}$ e V são subespaços ditos triviais de V.

Exemplos:

- Ex.1: Verique se $W = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | z + y = 0\right\}$ é subespaço de $\mathbb{R}^3$.

Subespaços Vetoriais

- Ex.2: Seja $v \in V = \mathbb{R}^2$. Mostre que $W = \{\alpha v\}$ é um subespaço de V.

Subespaços Vetoriais

- Ex.2: Seja $v \in V = \mathbb{R}^2$. Mostre que $W = \{\alpha v\}$ é um subespaço de V.
- Ex.3: Seja $V = \{A_{2x2}\}$, onde A_{2x2} são matrizes reais. Mostre que $W = \{T_{2x2}\}$, onde T_{2x2} são matrizes triangulares superiores é subespaço de V.

Subespaços Vetoriais

- Ex.2: Seja $v \in V = \mathbb{R}^2$. Mostre que $W = \{\alpha v\}$ é um subespaço de V.
- Ex.3: Seja $V = \{A_{2x2}\}$, onde A_{2x2} são matrizes reais. Mostre que $W = \{T_{2x2}\}$, onde T_{2x2} são matrizes triangulares superiores é subespaço de V.
- Ex.4: Mostre que $W = \{B_{n \times n} | b_{11} \leq 0\}$ não é subespaço do espaço de matrizes $A_{n \times n}$.

Subespaços Vetoriais

Teorema

1) Se W_1 *e* W_2 *são subespaços de* V*, então* $W_1 \cap W_2$ *também é subespaço de* V*.*

Subespaços Vetoriais

Teorema

1) Se W_1 *e* W_2 *são subespaços de* V*, então* $W_1 \cap W_2$ *também é subespaço de* V.

Teorema

2) Se W_1 *e* W_2 *são subespaços de* V*, então* $W_1 + W_2 = \{v \in V | v = w_1 + w_2 | w_1 \in W_1 \text{ e } w_2 \in W_2\}$ *também é subespaço de* V.

Subespaços Vetoriais

Teorema

1) Se W_1 e W_2 são subespaços de V, então $W_1 \cap W_2$ também é subespaço de V.

Teorema

2) Se W_1 e W_2 são subespaços de V, então $W_1 + W_2 = \{v \in V | v = w_1 + w_2 | w_1 \in W_1 \text{ e } w_2 \in W_2\}$ também é subespaço de V.

Teorema

3) Se W_1 e W_2 são subespaços de V, então $W_1 \cap W_2 = \{v \in V | v \in W_1 \text{ e } v \in W_2\}$ também é subespaço de V.

Combinação Linear

Definições

Sejam vetores $v_i \in V$ e escalares α_i, com $i = 1 \ldots n$. O vetor

$$u = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i$$

é uma combinação linear dos vetores v_i.

Combinação Linear

Definições

Sejam vetores $v_i \in V$ e escalares α_i, com $i = 1 \ldots n$. O vetor

$$u = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i$$

é uma combinação linear dos vetores v_i.

Teorema

O conjunto $W = \{\sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i | v_i \in V, \alpha_i \in \mathbb{R}\}$ *é um subespaço de* V.

Combinação Linear

Definições

Sejam vetores $v_i \in V$ e escalares α_i, com $i = 1 \ldots n$. O vetor

$$u = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i$$

é uma combinação linear dos vetores v_i.

Teorema

O conjunto $W = \{\sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i | v_i \in V, \alpha_i \in \mathbb{R}\}$ *é um subespaço de* V.

O conjunto W também é denotado por $[v_1, v_2, \ldots, v_n]$ (ou simplesmente $[v_i]$) é chamado de subespaço gerado pelos vetores v_i.

Combinação Linear

- Ex.1: Seja v um vetor não nulo de um espaço V. Mostre que $W = \{\alpha v\}$ é uma combinação linear e um subespaço de V.

Combinação Linear

- Ex.1: Seja v um vetor não nulo de um espaço V. Mostre que $W = \{\alpha v\}$ é uma combinação linear e um subespaço de V.
- Ex.2: Sejam v_1 e v_2 vetores não nulos de um espaço V. Mostre que $W = [v_1, v_2]$ é uma combinação linear e um subespaço de V.

Combinação Linear

- Ex.1: Seja v um vetor não nulo de um espaço V. Mostre que $W = \{\alpha v\}$ é uma combinação linear e um subespaço de V.
- Ex.2: Sejam v_1 e v_2 vetores não nulos de um espaço V. Mostre que $W = [v_1, v_2]$ é uma combinação linear e um subespaço de V.
- Ex.3: Seja $V = \mathbb{R}^3$, mostre que, dados $v_1 = (1, 0, 0)$, $v_2 = (0, 1, 0)$ e $v_3 = (1, 1, 0)$, $[v_1, v_2]$ e $[v_1, v_2, v_3]$ geram o mesmo subespaço de V. Mostre também que v_3 é CL dos outros.

Dependência Linear

Um problema usual em AL é definir um conjunto mínimo de vetores capazes de descrever todos os outros vetores de um espaço.

Definição

Sejam $v_i \in V$, o conjunto $\{v_i\}$, com $i = 1...n.$, é dito linearmente independente (LI) se e somente se

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i = o$$

implica que todos $\alpha_i = 0$.

Dependência Linear

Um problema usual em AL é definir um conjunto mínimo de vetores capazes de descrever todos os outros vetores de um espaço.

Definição

Sejam $v_i \in V$, o conjunto $\{v_i\}$, com $i = 1...n.$, é dito linearmente independente (LI) se e somente se

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i = o$$

implica que todos $\alpha_i = 0$.

Caso algum $\alpha_i \neq 0$ o conjunto $\{v_i\}$ é dito linearmente dependente (LD).

Dependência Linear

- Seja $V = \mathbb{R}^3$, mostre que, dados $v_1 = (1,0,0)$, $v_2 = (0,1,0)$ e $v_3 = (1,1,0)$. Mostre que os conjuntos $\{v_1, v_2\}$, $\{v_1, v_3\}$, $\{v_2, v_3\}$ são LI e o conjuto $\{v_1, v_2, v_3\}$ é LD.

Dependência Linear

- Seja $V = \mathbb{R}^3$, mostre que, dados $v_1 = (1, 0, 0)$, $v_2 = (0, 1, 0)$ e $v_3 = (1, 1, 0)$. Mostre que os conjuntos $\{v_1, v_2\}$, $\{v_1, v_3\}$, $\{v_2, v_3\}$ são LI e o conjuto $\{v_1, v_2, v_3\}$ é LD.

Teorema

$\{v_i\}$ é LD se e somente se um dos vetores for combinação linear dos outros.

Base de um EV

Definição

Um conjunto $\{v_i\}$ de vetores de V será uma base de V se:

i)$\{v_i\}$ é LI

ii) $[v_i] = V$

Base de um EV

Definição

Um conjunto $\{v_i\}$ de vetores de V será uma base de V se:
i)$\{v_i\}$ é LI
ii) $[v_i] = V$

- Ex.1: Mostre que $\{(1,0),(0,1)\}$ é uma base de $\mathbb{R}^2$.

Base de um EV

Definição

Um conjunto $\{v_i\}$ de vetores de V será uma base de V se:
i)$\{v_i\}$ é LI
ii) $[v_i] = V$

- Ex.1: Mostre que $\{(1,0),(0,1)\}$ é uma base de $\mathbb{R}^2$.
- Ex.2: Determine uma base para o espaço das matrizes reais $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$.

Base de um EV

Teorema

Seja $\{v_i\}$ *uma base de* V, *com* $i = 1...n$. *Qualquer outro conjunto* $\{v_j\}$ *com* $j = 1...m$ *e* $m > n$ *é LD.*

Base de um EV

Teorema

Seja $\{v_i\}$ uma base de V, com $i = 1...n$. Qualquer outro conjunto $\{v_j\}$ com $j = 1...m$ e $m > n$ é LD.

- Ex.: Considerando vetores do $\mathbb{R}^2$, mostre que para qualquer (a, b), $\{(1,0), (0,1), (a,b)\}$ é LD.

Dimensão de um EV

Como vimos, uma base de um EV tem um número invariante de vetores, em função disso podemos definir a dimensão de um EV (finitamente gerado):

Definição

Seja $\{v_1, v_2, ..., v_n\}$ uma base qualquer de V, a dimensão de V é o número de vetores da base, n.

Dimensão de um EV

Como vimos, uma base de um EV tem um número invariante de vetores, em função disso podemos definir a dimensão de um EV (finitamente gerado):

Definição

Seja $\{v_1, v_2, ..., v_n\}$ uma base qualquer de V, a dimensão de V é o número de vetores da base, n.

- Ex.1: Determine a dimensão de $\mathbb{R}^2$.

Dimensão de um EV

Como vimos, uma base de um EV tem um número invariante de vetores, em função disso podemos definir a dimensão de um EV (finitamente gerado):

Definição

Seja $\{v_1, v_2, ..., v_n\}$ uma base qualquer de V, a dimensão de V é o número de vetores da base, n.

- Ex.1: Determine a dimensão de $\mathbb{R}^2$.
- Ex.2: Determine a dimensão de $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$.

Dimensão de um EV

Teorema

Seja $\{v_1, v_2, ..., v_r\}$ *um conjunto LI de um espaço com* $dim(V) = n$, *com* $r < n$. *Sempre podemos introduzir ao conjunto* $(n - r)$ *vetores de forma que o novo conjunto seja uma base de* V.

Dimensão de um EV

Teorema

Seja $\{v_1, v_2, ..., v_r\}$ um conjunto LI de um espaço com $dim(V) = n$, com $r < n$. Sempre podemos introduzir ao conjunto $(n - r)$ vetores de forma que o novo conjunto seja uma base de V.

- Ex.1: Seja o conjuto $W = \{(1,0,0,0), (0,1,0,0)\}$ de vetores do $\mathbb{R}^4$. Determine vetores que precisam ser adicionados ao conjunto para que tenhamos uma base do $\mathbb{R}^4$.

Dimensão da soma de Subespaços

Teorema

Sejam U e W subespaços de V, então $dim(U) \leq dim(V)$, $dim(W) \leq dim(V)$ *e*

$$dim(U+W) = dim(U) + dim(W) - dim(U \cap W)$$

Coordenadas de uma Base

Teorema

Dada uma base $\{v_i\}$ de um espaço V, todo $u \in V$ pode ser expresso como uma única CL dessa base.

Definição

Sejam $B = \{v_i\}$ uma base de um espaço V e $u = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \ldots + \alpha_n v_n \in V$. O conjunto ordenado $\{\alpha_i\}$ são as coordenadas de u na base B, que são denotadas por

$$u\big|_B = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}.$$

Dimensão de um EV

- Ex.1: Determine as coordenadas de $(2,3)$ nas bases $\{(1,0),(0,1)\}$ e $\{(0,1),(1,0)\}$.

Dimensão de um EV

- Ex.1: Determine as coordenadas de $(2,3)$ nas bases $\{(1,0),(0,1)\}$ e $\{(0,1),(1,0)\}$.
- Ex.2: Determine as coordenadas de $(2,3)$ na base $\{(1,2),(-1,3)\}$

Dimensão de um EV

- Ex.1: Determine as coordenadas de $(2,3)$ nas bases $\{(1,0),(0,1)\}$ e $\{(0,1),(1,0)\}$.
- Ex.2: Determine as coordenadas de $(2,3)$ na base $\{(1,2),(-1,3)\}$
- Ex.3: Determine as coordenadas de $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$ na base $\left\{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right\}$

Mudança de Base

Sejam $B = \{u_i\}$ e $C = \{w_i\}$ duas bases ordenadas de um mesmo espaço V. Um vetor r de V pode então ser expresso nas formas:

$$r|_B = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$$

e

$$r|_C = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix} .$$

Mudança de Base

Suponha que queiramos trocar as coordenadas de r da base B para C. Expressando $\{u_i\}$ em termos de $\{w_i\}$ temos

$$\begin{aligned} u_1 &= a_{11}w_1 + a_{12}w_2 + \cdots + a_{1n}w_n \\ \vdots &= \qquad\qquad \vdots \\ u_n &= a_{n1}w_1 + w_{n1}u_2 + \cdots + a_{nn}w_n \,. \end{aligned}$$

Dado que

$$r = \sum_i \alpha_i u_i \,,$$

temos

$$r = \alpha_1 \left(a_{11}w_1 + a_{12}w_2 + \cdots a_{1n}w_n \right) + \alpha_2 \left(a_{21}w_1 + a_{22}w_2 + \cdots a_{2n}w_n \right) + \cdots \alpha_n \left(a_{n1}w_1 + a_{n2}w_2 + \cdots a_{nn}w_n \right) \,.$$

Mudança de Base

Então as coordenadas de r na base C são dadas por

$$r|_C = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix},$$

de onde definimos a matriz de mudança de base

$$A_{BC} = (a_{ij})^T \ ,$$

ou seja

$$r|_C = A_{BC}\, r|_B \, .$$

Mudança de Base

Outra maneira de expressar este resultado é:

$$r = \sum_i \alpha_i u_i = \sum_i \beta_i w_i \,,$$

onde

$$u_i = \sum_j a_{ij} w_j \,,$$

então

$$r = \sum_i \alpha_i \sum_j a_{ij} w_j = \sum_j \left(\sum_i a_{ij} \alpha_i \right) w_j$$

e finalmente temos

$$\beta_j = \sum_i a_{ij} \alpha_i \,.$$

Mudança de Base

- Ex.1:
  Sejam $B = \{(1,0),(0,1)\}$ e $C = \{(2,0),(0,1/2)\}$ duas bases do $\mathbb{R}^2$. Determine a matriz de mudança de base de B para C e depois de C para B.

Mudança de Base

- Ex.1:
  Sejam $B = \{(1,0),(0,1)\}$ e $C = \{(2,0),(0,1/2)\}$ duas bases do $\mathbb{R}^2$. Determine a matriz de mudança de base de B para C e depois de C para B.
- Ex.2
  Sejam $B = \{(1,1),(0,2)\}$ e $C = \{(1,0),(0,1)\}$ duas bases do $\mathbb{R}^2$. Determine a matriz de mudança de base de B para C e depois de C para B.

Mudança de Base

- Ex.1:
  Sejam $B = \{(1,0),(0,1)\}$ e $C = \{(2,0),(0,1/2)\}$ duas bases do $\mathbb{R}^2$. Determine a matriz de mudança de base de B para C e depois de C para B.
- Ex.2
  Sejam $B = \{(1,1),(0,2)\}$ e $C = \{(1,0),(0,1)\}$ duas bases do $\mathbb{R}^2$. Determine a matriz de mudança de base de B para C e depois de C para B.

Note que se A é a matriz de mudança de uma base B para uma base C, $r|_C = Ar|_B$, então a mudança de C para B é:

$$r|_B = A^{-1} r|_C \,.$$

Mudança de Base

- Ex.3:
  Mostre que a matriz

$$A = \begin{pmatrix} \cos\theta & \text{sen}\theta \\ -\text{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

  representa uma rotação rígida de um ângulo θ da base canônica em $\mathbb{R}^2$. Encontre as coordenadas de um vetor na base rotacionada e a matriz da transformação inversa.

Definição de Transformação Linear (TL)

Definição

Sejam dois espaços vetoriais V e W, uma TL é uma função $F : V \to W$ que satisfaz as condições:

1. $F(u+v) = F(u) + F(v)$, para quaisquer $u, v \in V$.
2. $F(\alpha u) = \alpha F(u)$, para quaisquer $u \in V$ e $\alpha \in \mathbb{R}$.

Definição de Transformação Linear (TL)

Definição

Sejam dois espaços vetoriais V e W, uma TL é uma função $F : V \to W$ que satisfaz as condições:

1. $F(u + v) = F(u) + F(v)$, para quaisquer $u, v \in V$.
2. $F(\alpha u) = \alpha F(u)$, para quaisquer $u \in V$ e $\alpha \in \mathbb{R}$.

- Ex.1
  Para quais valor de α e β $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, tal que $x \mapsto \alpha x + \beta$, é uma TL?

Transformação Linear

- Ex.2
  Mostre que $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, tal que

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto (\alpha, \beta, \gamma) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

  é uma TL.

Transformação Linear

- Ex.2
  Mostre que $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, tal que
  $$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto (\alpha, \beta, \gamma) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$
  é uma TL.
- Ex.3
  Mostre que $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, tal que $x \mapsto (\alpha x + \beta)^2$ não é uma TL.

Transformação Linear

- Ex.2
  Mostre que $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, tal que
  $$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto (\alpha, \beta, \gamma) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$
  é uma TL.
- Ex.3
  Mostre que $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, tal que $x \mapsto (\alpha x + \beta)^2$ não é uma TL.
- Ex.4
  Mostre que $D : P_n(\mathbb{R}) \to P_n(\mathbb{R})$, tal que $D(p(x)) = \frac{dp}{dx}$ é uma TL.

Propriedades de uma TL

1. $F(o) = o$
2. $F(-v) = -F(v)$
3. $F(v_1 - v_2) = F(v_1) - F(v_2)$
4. $F\left(\sum_i a_i v_i\right) = \sum_i a_i F(v_i)$

Núcleo e Imagem

Definição

Sejam os espaços V e W e $F : V \to W$ uma TL. O núcleo dessa TL é dado por

$$\mathrm{N}\left(F\right) = \left\{v \in V | F\left(v\right) = o\right\}.$$

Núcleo e Imagem

Definição

Sejam os espaços V e W e $F : V \rightarrow W$ uma TL. O núcleo dessa TL é dado por

$$N(F) = \{v \in V | F(v) = o\}.$$

Definição

Sejam os espaços V e W e $F : V \rightarrow W$ uma TL. A imagem dessa TL é dada por

$$\mathrm{Im}(F) = \{F(v) | v \in V\}.$$

Núcleo e Imagem

Propriedades:

1. $\mathrm{N}(F)$ é subespaço de V.
2. $\mathrm{Im}(F)$ é subespaço de W.
3. F é injetora se e somente se $\mathrm{N}(F) = \{o\}$

Núcleo e Imagem

- Ex.1
  Determine o núcleo e imagem da TL $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,
  $(x, y) \mapsto x + y$.

Núcleo e Imagem

- Ex.1
  Determine o núcleo e imagem da TL $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x, y) \mapsto x + y$.
- Ex.2
  Determine o núcleo e imagem da TL $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $(x, y, z) \mapsto (x, 2y, 0)$.

Teorema Núcleo e Imagem

Teorema

Seja a TL $F : U \to V$ com U e V de dimensão finita, então

$$dimU = dimN(F) + dimIm(F) \ .$$

Teorema Núcleo e Imagem

Teorema

Seja a TL $F : U \to V$ com U e V de dimensão finita, então

$$dimU = dimN(F) + dimIm(F) \; .$$

Pontos da demonstração:

- $B_1 = \{u_1, ..., u_r\}$ é base de $\mathrm{N}(F)$.
- $B_2 = \{u_1, ..., u_r, v_1, ..., v_s\}$ é base de U.
- $B = \{F(v_1), ..., F(v_s)\}$ é base de $\mathrm{Im}(F)$.

Núcleo e Imagem

- Ex.1
  Verifique o Teo. NI para as seguintes TLs:
  - $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, (x, y) \mapsto x + y$
  - $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $(x, y, z) \mapsto (x, 2y, 0)$
  - $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $(x, y, z) \mapsto (\alpha x, \beta y, \gamma z)$, com $\alpha, \beta, \gamma \neq 0$.

Isomorfismo

Definição

Isomorfismo entre dois espaços U e V é uma TL $F : U \to V$ bijetora.

....