Álgebra Linear – ECT2202
Lista de Exercícios – Espaços Vetoriais
Prof. Ronaldo

21 de março de 2019

1 Definição de ES

1. Verifique que os seguintes conjuntos, com operações de soma e multiplicação por escalar usuais, são espaços vetoriais:

   (a) $V = \{(a, b, c, d)\,| a, b, c, d \in \mathbb{R}\}$

   (b) $V = \{(a + ib)\,| a, b \in \mathbb{R}\}$, onde i é o número imaginário.

   (c) $V = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} | a, b, c, d \in \mathbb{R} \right\}$

   (d) $V = \{p\,(x) = a + bx + cx^2 | a, b, c \in \mathbb{R}\}$

2. Considere o seguinte conjunto $V = \{(a, b)\,| a, b \in \mathbb{R}\}$ com as seguintes operações de soma e multiplicação por escalar:

   $$(a, b) + (c, d) = \left(\sqrt{a^2 + c^2}, \sqrt{b^2 + d^2}\right)$$

   e

   $$\alpha\,(a, b) = (\alpha a, \alpha b)\ \ .$$

   Demonstre quais propriedades de EV esse conjunto não satisfaz.

2 Subespaços Vetoriais

1. Determine se os conjuntos W dados abaixo são subespaços de V:

   (a) $W = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | y = -x\}$ e $V = \mathbb{R}^2$

   (b) $W = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | y = 1 - x\}$ e $V = \mathbb{R}^2$

   (c) $W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | z = -2y \in \mathbb{R}\}$ e $V = \mathbb{R}^2$

(d) $W = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | z = -2y \in \mathbb{R}\}$ e $V = \mathbb{R}^3$

(e) $W = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} | a, b \in \mathbb{R} \right\}$ e $V = M_{2\times 2}(\mathbb{R})$

(f) $W = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} | a, b \in \mathbb{R} \text{ e } c = b^2 \right\}$ e $V = M_{2\times 2}(\mathbb{R})$

3 Dependência linear e bases

1. Determine se os vetores dos conjuntos dados são LD ou LI:

   (a) $\{(2,4), (-1,-2)\}$

   (b) $\{(2,4), (-1,-2), (1,1)\}$

   (c) $\{(2,4), (1,1)\}$

   (d) $\{(1,0,0), (1,1,0), (1,1,1)\}$

   (e) $\{(1,0,0), (-1,-2,-2), (1,1,1)\}$

   (f) $\{(1,0,1,0), (1,1,0,0), (1,1,1,0), (0,0,0,1)\}$

2. Determine se os conjuntos do exercício anterior são, respectivamente, base dos espaços:

   (a) $\mathbb{R}^2$e $\mathbb{R}^3$

   (b) $\mathbb{R}^2$e $\mathbb{R}^3$

   (c) $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$

   (d) $\mathbb{R}^3$e $\mathbb{R}^4$

   (e) $\mathbb{R}^3$e $\mathbb{R}^4$

   (f) $\mathbb{R}^4$e $\mathbb{R}^5$

3. Complete os seguintes conjuntos para que sejam base dos respectivos espaços:

   (a) $\{(1,1)\}$ de $\mathbb{R}^2$

   (b) $\{(1,1,0), (0,1,1)\}$ de $\mathbb{R}^3$

   (c) $\{(1,1,0,0), (0,1,1,0)\}$ de $\mathbb{R}^4$

   (d) $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$ de $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$

   (e) $\{(1), (1+t^2)\}$ de $P_2(\mathbb{R})$

4. Determine sob que condições o conjunto $\{(1,\alpha), (\alpha,1)\}$, com α real, é base do $\mathbb{R}^2$.

4 Coordenadas

1. Determine as coordenadas de um vetor genérico dos espaços para as bases verificadas ou construídas no exercícios 2 e 3 da seção anterior.

2. Considerando o espaço $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$, determine a matriz de mudança entre as bases

$$A = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

   e

$$B = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

3. Determine as matrizes de mudança de base entre:

   (a) $A = \{(1,0), (0,1)\}$ e $B = \{(\alpha,0), (0,\beta)\}$, onde α, β são reais. Verifique se existem valores de α e β para os quais B não é base e o que isso representa para as matrizes de mudança de base.

   (b) $A = \{(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)\}$ e B obtida de uma rotação de θ em torno do vetor $(0,0,1)$.

   (c) $A = \{(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)\}$ e $B = \{\alpha(1,0,0), \beta(1,0,0), \gamma(0,0,1)\}$ com $\alpha, \beta, \gamma \neq 0$.

5 Transformações Lineares

1. Determine para quais valores do parâmetros (letras gregas) as transformações abaixo são lineares:

   (a) $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, tal que $(x,y,z) \mapsto (\alpha x, \alpha y + z + \beta)$

   (b) $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, tal que $(x,y) \mapsto (x^\alpha, \alpha x + y^\beta)$

   (c) $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, tal que $(x) \mapsto (x, \alpha)$

   (d) $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, tal que $(x,y,z) \mapsto (x + \alpha, \beta y, z + \gamma)$

2. Para as TLs dadas, determine núcleo e imagem, a matriz de transformação e, se possível, sua inversa (caso necessário, avalie as condições sob os parâmetros):

   (a) $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $(x,y) \mapsto \alpha(x,y)$

   (b) $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$,$(x,y) \mapsto (-y,-x)$

   (c) $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$,$(x,y) \mapsto (x,y,x)$

   (d) $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$,$(x,y) \mapsto (\alpha x - y, x + \beta y)$

   (e) $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$,$(x,y,z) \mapsto (x+y, y+z, z+x)$

(f) $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2, (x, y, z) \mapsto (x + y, y + z)$

(g) $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, (x, y, z) \mapsto (x + y, 0, z + x)$

(h) $F : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4, (x, y, z, w) \mapsto (x, y, 0, 0)$

(i) $F : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4, (x, y, z, w) \mapsto (-2x, y/2, 0, z)$