Álgebra Linear – ECT2202

Prof. Ronaldo Carlotto Batista

17 de abril de 2019

AVISO

O propósito fundamental destes slides é servir como um guia para as aulas. Portanto eles não devem ser entendidos como referência de texto didático. O assunto aqui apresentado pode ser encontrado em detalhes nos livros indicados como bibliografia do curso

Definições

Definição

Seja $F : V \to V$ uma TL, se existirem $v \neq o \in V$ e $\lambda \in \mathbb{R}$ tais que:

$$F(v) = \lambda v,$$

λ é um autovalor de F e v é autovetor de λ.

Definições

Definição

Seja $F : V \to V$ uma TL, se existirem $v \neq o \in V$ e $\lambda \in \mathbb{R}$ tais que:

$$F(v) = \lambda v \,,$$

λ é um autovalor de F e v é autovetor de λ.

- Ex.1:
  $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $v \mapsto 2v$ tem autovalor $\lambda = 2$ e com autovetores $(x, y) \neq o$.

Definições

Definição

Seja $F : V \to V$ uma TL, se existirem $v \neq o \in V$ e $\lambda \in \mathbb{R}$ tais que:

$$F(v) = \lambda v,$$

λ é um autovalor de F e v é autovetor de λ.

- Ex.1:
  $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $v \mapsto 2v$ tem autovalor $\lambda = 2$ e com autovetores $(x, y) \neq o$.
- Ex.2:
  Determine os autovalores e vetores de $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $(x, y) \mapsto (x, -y)$.

Definições

Definição

Seja $F : V \to V$ uma TL, se existirem $v \neq o \in V$ e $\lambda \in \mathbb{R}$ tais que:

$$F(v) = \lambda v\,,$$

λ é um autovalor de F e v é autovetor de λ.

- Ex.1:
  $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $v \mapsto 2v$ tem autovalor $\lambda = 2$ e com autovetores $(x, y) \neq o$.
- Ex.2:
  Determine os autovalores e vetores de $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $(x, y) \mapsto (x, -y)$.
- Ex.3:
  Determine os autovalores e vetores de $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $(x, y) \mapsto (-y, x)$.

Polinômio Característico

Para determinar autovalores, precisamos resolver equações matriciais do tipo

$$Av = \lambda v\,,$$

que pode ser reescrita como

$$(A - \lambda I)\, v = 0\,.$$

Caso a matriz tenha inversa, existe uma única solução $v = o$. Para a existência de autovetores, queremos justamente o contrário, então devemos encontrar valores de λ tais que:

$$\det\,(A - \lambda I) = 0\,,$$

que gera uma equação polinomial, sendo $P\,(\lambda) = \det\,(A - \lambda I)$ o polinômio característico.

Polinômio Característico

- Ex.1:
  Determine os AVas e AVes das TLs $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dadas por:

$$\begin{pmatrix} -3 & 4 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Polinômio Característico

- Ex.1:
  Determine os AVas e AVes das TLs $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dadas por:

$$\begin{pmatrix} -3 & 4 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

- Ex.2:
  Determine os AVas e AVes das TLs $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dadas por:

$$\begin{pmatrix} \sqrt{3} & -1 \\ 1 & \sqrt{3} \end{pmatrix}$$

Espaço de Autovetores

Até aqui analisamos TLs agindo sob as componentes de vetores ou sob suas coordenadas na base canônica. Agora vamos determinar uma base na qual a matriz de um TL seja diagonal.

Teorema

Autovetores de autovalores distintos são LI.

Espaço de Autovetores

Até aqui analisamos TLs agindo sob as componentes de vetores ou sob suas coordenadas na base canônica. Agora vamos determinar uma base na qual a matriz de um TL seja diagonal.

Teorema

Autovetores de autovalores distintos são LI.

Corolário

Se V é um espaço de dimensão n, e uma TL, F, tem n autovalores distintos, os autovetores da TL são uma base de V.

Espaço de Autovetores

Até aqui analisamos TLs agindo sob as componentes de vetores ou sob suas coordenadas na base canônica. Agora vamos determinar uma base na qual a matriz de um TL seja diagonal.

Teorema

Autovetores de autovalores distintos são LI.

Corolário

Se V é um espaço de dimensão n, e uma TL, F, tem n autovalores distintos, os autovetores da TL são uma base de V.

- Ex.1:
  Mostre que os autovetores da TL $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ com matriz dada abaixo são base de $\mathbb{R}^2$

$$\begin{pmatrix} -3 & 4 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Representação de uma TL numa base

Podemos considerar TLs agindo sob as coordenadas de um vetor numa base específica. Seja

$$X_B = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

as coodenadas do vetor $v = (v_1, ..., v_n)$ numa base B. Se B é base canônica:

$$X_B = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} .$$

Assim, uma TL pode ser representada pela multiplicação matricial

$$A_B X_B ,$$

onde A_B é a matriz da TL na base B.

Representação de uma TL numa base

Sejam duas bases, $B = \{u_1, ..., u_n\}$ e $C = \{v_1, ..., v_m\}$, de dois espaços U e V. Para uma TL $F : U \to V$, podemos escrever

$$F(u_i) = \sum_{j=1}^{m} a_{ij} v_j \, ,$$

a matriz $A_{BC} = (a_{ij})$ é chamada de matriz da TL em relação às bases B e C.

Diagonalização de uma TL

Consideremos TLs do tipo $F : U \to U$. Se a TL tem $n = \dim U$ autovalores distintos, λ_i, então o conjunto $B = \{v_i\}$ de autovetores de F é base de U. Então temos:

$$F\left(v_i\right) = \lambda_i v_i$$

e a matriz da TL em relação a base de autovetores B assume a forma diagonal:

$$A_B = \operatorname{diag}\left(\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n\right)$$

Diagonalização de uma TL

Consideremos TLs do tipo $F : U \to U$. Se a TL tem $n = \dim U$ autovalores distintos, λ_i, então o conjunto $B = \{v_i\}$ de autovetores de F é base de U. Então temos:

$$F(v_i) = \lambda_i v_i$$

e a matriz da TL em relação a base de autovetores B assume a forma diagonal:

$$A_B = \operatorname{diag}(\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n)$$

Se houver autovalores repetidos ainda pode ser possível construir uma base de autovetores de mesma dimensão, vejamos o exemplo a seguir.

Diagonalização de uma TL

Consideremos TLs do tipo $F : U \to U$. Se a TL tem $n = \dim U$ autovalores distintos, λ_i, então o conjunto $B = \{v_i\}$ de autovetores de F é base de U. Então temos:

$$F(v_i) = \lambda_i v_i$$

e a matriz da TL em relação a base de autovetores B assume a forma diagonal:

$$A_B = \operatorname{diag}(\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n)$$

Se houver autovalores repetidos ainda pode ser possível construir uma base de autovetores de mesma dimensão, vejamos o exemplo a seguir.

- Ex.1:
  Determine a forma diagonal da matriz da TL $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ com matriz na base canônica dada abaixo

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & -4 \\ 0 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Diagonalização de uma TL

Seja A_B a matriz de uma TL na base B, para vetores $u \in U$, temos

$$A_B u_B = u'_B \,.$$

Se $C = \{v_i\}$ é uma base de autovetores do espaço U, temos

$$A_B v_{iB} = \lambda_i v_{iB}$$

e escrever $u_C = M u_B$, onde M é a matriz de transformação de coordenadas da base B para base C, $u_B = M^{-1} u_C$. Vamos trocar a equação de autovetores para sua própria base

$$A_B M^{-1} v_{iC} = \lambda_i M^{-1} v_{iC} \,,$$

multiplicando pela matriz M à esquerda, temos

$$M A_B M^{-1} v_{iC} = M \lambda_i M^{-1} v_{iC} = (\lambda_i I)\, v_{iC} \,.$$

Assim, identificamos a matriz de transformação na base C, que tem forma diagonal:

$$A_C = M A_B M^{-1} = \lambda_i I \,.$$

Produto Interno

Para vetores geométricos, o produto escalar nos permite determinar o módulo (ou "comprimento") de um vetor, assim como o ângulo entre vetores. Para um espaço vetorial qualquer, vamos generalizar essa operação.

Definição

O produto interno entre dois vetores u e v de um espaço vetorial é um único número real $\langle u, v \rangle$ que satisfaz os seguintes axiomas:

1. $\langle u, v \rangle = \langle v, u \rangle$
2. $\langle u, v + w \rangle = \langle u, v \rangle + \langle u, w \rangle$
3. $\alpha \langle u, v \rangle = \langle \alpha u, v \rangle$
4. $\langle v, v \rangle \geq 0$

Produto Interno

- Ex.1
  Verifique que o produto escalar de vetores geométricos $v = (v_1, v_2, v_3) \in \mathbb{R}^3$,

$$\langle u, v \rangle = \sum_{i=1}^{3} u_i v_i$$

satisfaz as propriedades do produto interno.

Produto Interno

- Ex.1
  Verifique que o produto escalar de vetores geométricos $v = (v_1, v_2, v_3) \in \mathbb{R}^3$,

$$\langle u, v \rangle = \sum_{i=1}^{3} u_i v_i$$

  satisfaz as propriedades do produto interno.

- Ex.2
  Seja o espaço $P_1(\mathbb{R})$, determine o resultado geral do seguinte produto interno:

$$\langle u, v \rangle = \int_0^1 u(x)\, v(x)\, dx$$

Ortogonalidade

Definição

Dois vetores u e v são ortogonais se

$$\langle u, v \rangle = 0\,.$$

Ortogonalidade

Definição

Dois vetores u e v são ortogonais se

$$\langle u, v \rangle = 0 \,.$$

- Ex.1
  Mostre das propriedades do produto interno que o vetor nulo é ortogonal a qualquer vetor.

Ortogonalidade

Definição

Dois vetores u e v são ortogonais se

$$\langle u, v\rangle = 0 \,.$$

- Ex.1
  Mostre das propriedades do produto interno que o vetor nulo é ortogonal a qualquer vetor.

- Ex.2
  Sejam $u = (\alpha, 0, -3)$ $v = (2, 2, -1)$, determine α para que u e v sejam ortogonais.

Ortogonalidade

- Ex.3
  Sejam $u = 1 + \alpha x$ e $v = x$, determine α para qe u e v sejam ortogonais segundo o produto interno

$$\langle u, v\rangle = \int_0^1 u(x)\, v(x)\, dx$$

Ortogonalidade

- Ex.3
  Sejam $u = 1 + \alpha x$ e $v = x$, determine α para qe u e v sejam ortogonais segundo o produto interno

$$\langle u, v \rangle = \int_0^1 u(x)\, v(x)\, dx$$

Teorema

Seja $\{v_i\}$ um conjunto de vetores não nulos, ortogonais dois a dois. Então o conjunto $\{v_i\}$ é LI.

Base Ortogonal

Definição

Se o conjunto $\{v_i\}$ é uma base e seus vetores são ortogonais dois a dois, então a base é dita ortogonal.

Base Ortogonal

Definição

Se o conjunto $\{v_i\}$ é uma base e seus vetores são ortogonais dois a dois, então a base é dita ortogonal.

- Ex.1
  Verifique que a base canônica do $\mathbb{R}^3$ é ortogonal.

Base Ortogonal

Definição

Se o conjunto $\{v_i\}$ é uma base e seus vetores são ortogonais dois a dois, então a base é dita ortogonal.

- Ex.1
  Verifique que a base canônica do $\mathbb{R}^3$ é ortogonal.

- Ex.2
  Considerando o espaço $P_1(\mathbb{R})$, determine uma base ortogonal segundo o seguinte produto interno

$$\langle u, v \rangle = \int_0^1 u(x)\, v(x)\, dx\,.$$

Base Ortogonal

Teorema

Seja uma base ortogonal $\{v_i\}$, as coordenadas x_i de um vetor w nesta base são dadas por:

$$x_i = \frac{\langle w, v_i \rangle}{\langle v_i, v_i \rangle}$$

Base Ortogonal

Teorema

Seja uma base ortogonal $\{v_i\}$, as coordenadas x_i de um vetor w nesta base são dadas por:

$$x_i = \frac{\langle w, v_i \rangle}{\langle v_i, v_i \rangle}$$

- Ex.1
  Usando o produto interno, determine as coordenadas de um vetor (a, b) na base $\{(1, 1), (-1, 1)\}$.

Base Ortogonal

Teorema

Seja uma base ortogonal $\{v_i\}$, as coordenadas x_i de um vetor w nesta base são dadas por:

$$x_i = \frac{\langle w, v_i \rangle}{\langle v_i, v_i \rangle}$$

- Ex.1
  Usando o produto interno, determine as coordenadas de um vetor (a, b) na base $\{(1, 1), (-1, 1)\}$.
- Ex.2
  Na base de $P_1(\mathbb{R})$ encontrada anteriormente, determine as coodenadas de um vetor $u = a + bx$.oduto interno

$$\langle u, v \rangle = \int_0^1 u(x)\, v(x)\, dx\,.$$

Norma de um vetor

Definição

A norma de um vetor v é dada por:

$$|v| = \sqrt{\langle v, v \rangle}$$

Norma de um vetor

Definição

A norma de um vetor v é dada por:

$$|v| = \sqrt{\langle v, v\rangle}$$

- Ex.1
  Calcule a norma do vetor $v = a + bx$.

Norma de um vetor

Definição

A norma de um vetor v é dada por:

$$|v| = \sqrt{\langle v, v \rangle}$$

- Ex.1
  Calcule a norma do vetor $v = a + bx$.

Definição

Vetor unitário: a todo vetor não nulo, podemos associar um vetor unitário:

$$\hat{v} = \frac{v}{|v|}$$

Norma de um vetor

Definição

A norma de um vetor v é dada por:

$$|v| = \sqrt{\langle v, v \rangle}$$

- Ex.1
  Calcule a norma do vetor $v = a + bx$.

Definição

Vetor unitário: a todo vetor não nulo, podemos associar um vetor unitário:

$$\hat{v} = \frac{v}{|v|}$$

- Ex.1
  Para o vetor $v = a + bx$, determine $\hat{v}$.

Ângulo entre vetores

Teorema

Desigualdade de Schwarz:

$$|\langle u, v\rangle| \leq |v||u| \, .$$

Esta desigualdade nos permite definir o ângulo θ entre u e v como

$$\cos(\theta) = \frac{|\langle u, v\rangle|}{|v||u|} \, ,$$

que é precisamente a mesma expressão para o ângulo entre vetores geométricos.

Base Ortonormal

Definição

Se o conjunto $\{v_i\}$ é uma base e seus vetores são ortogonais dois a dois todos $|v_i| = 1$, a base é dita ortonormal.

Numa base ortonormal, as coordenadas um vetor w assumem a seguinte forma:

$$x_i = \langle w, v_i \rangle \,.$$

Ortogonalização de Gram-Schmidt

Seja uma base $B = \{v_1, v_2\}$, podemos construir uma base $C = \{v_1', v_2'\}$ ortogonal, escolhendo

$$v_1' = v_1$$

e

$$v_2' = v_2 - \langle v_2, v_1' \rangle \hat{v}_1' \,.$$

Se além de normal, quisermos uma base ortogonal, basta tomar $D = \{\hat{v}_1', \hat{v}_2'\}$.