Álgebra Linear – ECT2202

Prof. Ronaldo Carlotto Batista

30 de julho de 2024

AVISO

O propósito fundamental destes slides é servir como um guia para as aulas. Portanto eles não devem ser entendidos como referência de texto didático. O assunto aqui apresentado pode ser encontrado em detalhes nos livros indicados como bibliografia do curso

Matrizes Especiais

Definição

Matriz Simétrica: uma matriz real e quadrada A é simétrica se

$$A^T = A\,.$$

Equivalentemente, seus elementos são tais que $a_{ij} = a_{ji}$.

Matrizes Especiais

Definição

Matriz Simétrica: uma matriz real e quadrada A é simétrica se

$$A^T = A\,.$$

Equivalentemente, seus elementos são tais que $a_{ij} = a_{ji}$.

Definição

Matriz Ortogonal: uma matriz quadrada A é ortogonal se

$$AA^T = I \text{ e } A^T A = I\,.$$

Matrizes Especiais

- Ex.1: Determine sob que condições a matriz

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

é simétrica e mostre que seus autovalores são reais.

Matrizes Especiais

- Ex.1: Determine sob que condições a matriz

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

é simétrica e mostre que seus autovalores são reais.

- Ex.2: Seja base ortonomal $B = \{u, v\}$ de $\mathbb{R}^2$. Mostre que a matriz abaixo é ortogonal

$$A = \begin{pmatrix} v_1 & v_2 \\ u_1 & u_2 \end{pmatrix}.$$

Operadores Especiais

Definições

i) O operador de uma TL representada por uma matriz simétrica é dito **Auto Adjunto.**
ii) O operador de uma TL representada por uma matriz ortogonal é dito **Ortogonal.**

Problema de Mínimos Quadrados

Seja o seguinte sistema linear:

$$A_{m\times n}x_n = b_n \,,$$

com $m > n$. Esse sistema tem mais equações que incógnitas, logo pode ser incompatível. Mesmo assim, podemos encontrar a solução que melhor aproxima Ax de b. Para isso basta minimizar

$$r = \sqrt{|Ax - b|^2} \,.$$

Tal solução é dada por

$$A^T Ax = A^T b \,.$$

Problema de Mínimos Quadrados

- Ex. 1: Três estudantes querem medir a constante elática de uma mola, que obedece à lei de Hooke $F = kx$. Cada um mede um par de força aplicada (N) e deslocamento (cm), dados por $(13, 10)$, $(22, 18)$ e $(36, 28)$. Usando o método de MQ, determine o valor de k.

Problema de Mínimos Quadrados

- Ex. 1: Três estudantes querem medir a constante elática de uma mola, que obedece à lei de Hooke $F = kx$. Cada um mede um par de força aplicada (N) e deslocamento (cm), dados por $(13, 10)$, $(22, 18)$ e $(36, 28)$. Usando o método de MQ, determine o valor de k.

- Ex. 2: Determine a solução de mínimos quadrados de uma reta $y = ax + b$ que deve descrever o seguinte conjunto de dados:

x	y
1	0,2
2	2,1
3	3,8
4	5,7

Equação quadrática

A equação quadrática mais geral possível nas variáveis x e y é da forma

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0\,,$$

que pode ser expressa como

$$\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} d & e \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + f = 0\,.$$

Chamamos o primeito termo de Forma Quadrática, que também pode ser expresso por

$$X^T A X = ax^2 + 2bxy + cy^2\,.$$

Seções Cônicas

As formas canônicas das seções cônicas são

- Círculo: $x^2 + y^2 = r^2$,
- Elipse: $\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1$,
- Hipérbole: $\pm\frac{x^2}{\alpha^2} \mp \frac{y^2}{\beta^2} = 1$,
- Parábola: $x^2 = \alpha y$ ou $y^2 = \alpha x$.

Diagonalização das formas quadráticas

- Uma equação quadrática com d e e não nulos pode ser colocada numa forma puramente quadrática com uma translação de eixos $x \to x' + p$ e $y \to y' + q$. Isso equivale a proceder com um completamento de quadrado.
- Uma equação quadrática com b não nulo apresenta um termo cruzado xy, que pode ser eliminado com um rotação de eixos

$$Q \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix},$$

onde

$$Q = \begin{pmatrix} \cos\theta & \mathrm{sen}\theta \\ -\mathrm{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix}.$$

Note que Q é ortogonal, i.e., $QQ^T = QQ^{-1} = I$.

Diagonalização das formas quadráticas

A forma diagonal da matriz A da forma quadrática é dada por $B = \text{diag}\,(\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n)$, onde λ_i são os autovalores de A.

- Ex.1: Determine a forma canônica da seguinte cônica $3x^2 + 2xy + 3y^2 - 8 = 0$.

Diagonalização das formas quadráticas

A forma diagonal da matriz A da forma quadrática é dada por $B = \operatorname{diag}(\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n)$, onde λ_i são os autovalores de A.

- Ex.1: Determine a forma canônica da seguinte cônica $3x^2 + 2xy + 3y^2 - 8 = 0$.
- Ex.2: Determine a matriz de rotação que coloca a equação do exemplo anterior em sua forma canônica, i.e., $B = Q^{-1}AQ$.