Notas de Aula
Álgebra Linear

Elton José Figueiredo de Carvalho
Escola de Ciências e Tecnologia
Universidade Federal do Rio Grande do Norte

Versão 202003120894c
de 12 de março de 2020

Parte I

Espaços vetoriais

Capítulo 1

Estruturas fundamentais

A Álgebra Linear se ocupa de propriedades e operações envolvendo os chamados *espaços vetoriais*, que são generalizações dos conjuntos de vetores como o $\mathbb{R}^2$ e o $\mathbb{R}^3$, familiares a quem já estudou Geometria Analítica. Nesta parte, vamos definir e estudar os espaços vetoriais e sua construção.

Iniciamos o capítulo com a definição formal das estruturas algébricas com que nos ocuparemos: os *corpos* e os *espaços vetoriais* ou *espaços lineares*. Uma estrutura algébrica consiste em um ou mais *conjuntos* associados a uma ou mais *operações* entre elementos desse conjunto, com a condição de que essas operações satisfaçam certos *axiomas*. Por exemplo, o corpo dos números reais $(\mathbb{R}, +, \times)$ consiste no conjunto dos números reais, na operação de adição entre reais e na operação de multiplicação de números reais, que satisfazem aos *axiomas de corpo*. Já o espaço vetorial $(\mathbb{R}^3, +)$ sobre os reais consiste no conjunto das triplas de números reais $\mathbb{R}^3 = \{(x, y, z)|x, y, z \in \mathbb{R}\}$, associado às operações usuais de soma de vetores e multiplicação por números reais, que obedecem aos *axiomas de espaço vetorial*.

1.1 Axiomas de corpo

A fim de tratar dos corpos como estruturas algébricas, vamos tomar alguns fatos como verdadeiros desde o princípio. Esses fatos recebem o nome de *axiomas*. Primeiro, consideramos que existe um conjunto $\mathbb{K}$ e duas operações binárias, ou seja, que relacionam dois elementos do conjunto a um terceiro. A primeira operação chamamos de *adição* e denotamos pelo símbolo $+$. A segunda, chamamos de *multiplicação* e denotamos por $\cdot$ (um ponto centralizado na linha) ou, quando não houver ambiguidade, escrevendo lado a lado os elementos de $\mathbb{K}$ a serem multiplicados.

O leitor certamente está acostumado a lidar com operações por esses nomes e os axiomas enumerados a seguir parecerão triviais se considerarmos o conjuntos dos números reais e as operações de adição e multiplicação usuais. De fato, é possível mostrar que o conjunto dos números reais construido a partir das sucessivas extensões aos Naturais obedece a todos os axiomas a seguir, o que prova que eles formam um corpo. Aqui, entretanto, vamos falar de corpos de maneira generalizada, com a liberdade de definirmos os conjuntos, a adição e a multiplicação de qualquer forma que obedeça aos axiomas abaixo, a fim de utilizar suas propriedades para deduzir propriedades dos espaços vetoriais.

DEFINIÇÃO 1.1 (CORPO)**:** Um conjunto $\mathbb{K}$, associado a duas operações binárias: adição e multiplicação, é um corpo se, e somente se, obedecer aos seguintes *axiomas* (sejam α, β, γ elementos de $\mathbb{K}$, a seguir):

1. **Fechamento por adição**: A adição entre dois elementos α e β quaisquer de $\mathbb{K}$ resulta em um *único* elemento de $\mathbb{K}$, denotado por $\alpha + \beta$ e chamado de *soma* de α e β

2. **Fechamento por multiplicação**: A multiplicação entre dois elementos α e β quaisquer de $\mathbb{K}$ resulta em um *único* elemento de $\mathbb{K}$, denotado por $\alpha \cdot \beta$ ou $\alpha\beta$ e chamado de *produto* de α e β

3. **Comutatividade da adição**: $\alpha + \beta = \beta + \alpha$

4. **Comutatividade da multiplicação**: $\alpha\beta = \beta\alpha$

5. **Associatividade da adição**: $\alpha + (\beta + \gamma) = (\alpha + \beta) + \gamma$

6. **Associatividade da multiplicação**: $\alpha(\beta\gamma) = (\alpha\beta)\gamma$

7. **Distributividade**: $\alpha(\beta + \gamma) = \alpha\beta + \alpha\gamma$

8. **Existência da identidade da adição**: Existe um elemento em $\mathbb{K}$, denotado por 0 e chamado de *nulo* ou *elemento neutro da adição* tal que $\alpha + 0 = \alpha$ para todo $\alpha \in \mathbb{K}$.

9. **Existência da identidade da multiplicação**: Existe um elemento em $\mathbb{K}$, diferente de 0, denotado por 1 e chamado de *unidade* ou *elemento neutro da multiplicação* tal que $1 \cdot \alpha = \alpha$ para todo $\alpha \in \mathbb{K}$.

10. **Existência do oposto**: Para cada elemento $\alpha \in \mathbb{K}$ existe um elemento, chamado *oposto* de α e denotado por $(-\alpha)$, tal que $\alpha + (-\alpha) = 0$.

11. **Existência do recíproco**: Para cada elemento $\alpha \in \mathbb{K}$, $\alpha \neq 0$, existe um elemento, chamado *recíproco* de α e denotado por α^{-1} ou $\frac{1}{\alpha}$, tal que $\alpha \cdot \alpha^{-1} = 1$.

Pela definição acima, qualquer conjunto dotado das operações de adição e multiplicação que satisfaça a todos os 11 axiomas de corpo é um corpo. Por outro lado, basta que algum dos axiomas não seja satisfeito e o objeto em questão não pode ser considerado um corpo.

Exemplo 1.1.1*:* O conjunto dos números reais $\mathbb{R}$, com a adição e multiplicação usuais, é um corpo.

Demonstração. Os axiomas são imediatamente verificados através das propriedades das operações aritméticas fundamentais. ■

Exemplo 1.1.2*:* O conjunto dos números racionais $\mathbb{Q}$, com adição e multiplicação usuais, é um corpo.

Demonstração. O conjunto dos números racionais é construído a partir dos números inteiros estendidos com a exigência do Axioma 11, que postula a existência do recíproco de cada elemento. Os demais axiomas são verificados imediatamente. ■

Exemplo 1.1.3*:* O conjunto formado pelos inteiros $\{0, 1\}$, com a adição definida de forma que $1 + 1 = 0$ e a multiplicação usual, forma um corpo.

Demonstração. Como o número de elementos é pequeno, podemos testar exaustivamente a validade de cada axioma, isto é, testar todas as combinações possíveis de elementos em cada operação e verificar que o resultado satisfaz à proposição.

Exercício: Verifique. ■

Exemplo 1.1.4*:* O conjunto dos números complexos $\mathbb{C}$ da forma $(a + bi)$, com a e b números reais e $i^2 = -1$, a adição definida como

$$(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i$$

e multiplicação definida como

$$(a + bi) \cdot (c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)i$$

forma um corpo.

Demonstração. Precisamos testar a validade de cada um dos axiomas:

1. Fechamento por adição: Sejam $(a + bi)$ e $(c + di)$ elementos de $\mathbb{C}$. A soma desses elementos é dada por $(a + c) + (b + d)i$. Pelo Axioma 1 dos $\mathbb{R}$, $(a + c) \in \mathbb{R}$ e $(b + d) \in \mathbb{R}$. Com isso, a soma está na forma $(x + yi)$, com x e y reais e portanto pertence aos complexos.

2. FECHAMENTO POR MULTIPLICAÇÃO: Analogamente, pela definição de multiplicação proposta, temos que o produto entre dois complexo é da forma $(ac - bd) + (ad + bc)i$. As expressões entre parênteses são números reais, devido aos Axiomas 1 e 2 dos $\mathbb{R}$. Isso qualifica o produto como elemento dos Complexos.

3. COMUTATIVIDADE DA ADIÇÃO: Sejam $(a + bi)$ e $(c + di)$ elementos de $\mathbb{C}$. Então:

$$(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i$$

$$\begin{aligned}(c + di) + (a + bi) &= (c + a) + (d + b)i \\ &= (a + c) + (b + d)i \qquad \text{pelo Axioma 3 dos } \mathbb{R} \\ &= (a + bi) + (c + di)\end{aligned}$$

4. COMUTATIVIDADE DA MULTIPLICAÇÃO: Análogo ao anterior. Fica como exercício.

5. ASSOCIATIVIDADE DA ADIÇÃO: Sejam $\alpha = (a_\alpha + b_\alpha i)$, $\beta = (a_\beta + b_\beta i)$ e $\gamma = (a_\gamma + b_\gamma i)$ elementos de $\mathbb{C}$.

$$\alpha + (\beta + \gamma) = (a_\alpha + (a_\beta + a_\gamma)) + (b_\alpha + (b_\beta + b_\gamma))i$$

$$\begin{aligned}(\alpha + \beta) + \gamma &= ((a_\alpha + a_\beta) + a_\gamma) + ((b_\alpha + b_\beta) + b_\gamma)i \\ &= (a_\alpha + (a_\beta + a_\gamma)) + (b_\alpha + (b_\beta + b_\gamma))i \quad \text{pelo Axioma 5 dos } \mathbb{R} \\ &= \alpha + (\beta + \gamma)\end{aligned}$$

6. ASSOCIATIVIDADE DA MULTIPLICAÇÃO: Análogo ao anterior. Fica como exercício.

7. DISTRIBUTIVIDADE: Fica como exercício.

8. EXISTÊNCIA DA IDENTIDADE DA ADIÇÃO: Precisamos mostrar que existe um elemento $(x + yi) \in \mathbb{C}$ tal que $(a + bi) + (x + yi) = (a + bi)$, ou seja, existem números reais x e y tais que $a + x = a$ e $b + y = b$. Pelo mesmo Axioma 8 aplicado aos Reais, temos $x = 0$ e $y = 0$. Portanto, o elemento neutro da adição nos complexos existe e é $(0 + 0i)$.

9. EXISTÊNCIA DA IDENTIDADE DA MULTIPLICAÇÃO: Analogamente, devemos mostrar que existe $(x + yi) \in \mathbb{C}$ tal que $(a + bi)(x + yi) = (a + bi)$, ou seja:

$$\begin{aligned}(a + bi)(x + yi) &= (ax - by) + (ay + bx)i \\ &= a + bi\end{aligned}$$

Portanto:

$$\begin{cases} ax - by = a \\ ay + bx = b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 0, \end{cases}$$

o que mostra que a identidade da multiplicação existe e é $1 + 0i$

10. Existência do oposto: Fica como exercício. O procedimento é análogo ao anterior: encontrar $x + yi$ que satisfaça às condiões do axioma.

11. Existência do recíproco: Fica como exercício.

■

O conjunto dos números reais, $\mathbb{R}$, tem diversas outras propriedades, como os *axiomas de ordem*, que dizem ser possível ordenar seus elementos e definem o significado de símbolos como $<$, $>$, $\leqslant$, $\geqslant$. Nem todos os corpos, como definidos acima, têm essa propriedade. Um exemplo notável é do corpo dos complexos, $\mathbb{C}$.

Neste texto, trataremos de estruturas construídas sobre um corpo qualquer, $\mathbb{K}$, que, em geral, pode ser entendido como os $\mathbb{R}$ ou os $\mathbb{C}$, de forma que o ponto importante é que seus elementos obedecem aos 11 axiomas definidos acima.

1.2 Espaços vetoriais

Da mesma forma com que está acostumado a lidar com números reais, o leitor também está habituado a operar com vetores (bi- e tridimensionais), matrizes e números complexos. As operações com esses objetos consistem em uma *adição* de dois deles, que resulta em um terceiro, e na *multiplicação por um número*, geralmente real, que resulta em outro elemento do conjunto. Matrizes e números complexos podem também ser multiplicados *entre si* para obter outro objeto semelhante, enquanto entre vetores essa operação não existe.

Nota: O *produto vetorial* não é uma uma operação dessas, já que o vetor resultante dessa operação tem algumas propriedades de simetria diferente dos vetores que o originaram.

Levando em conta apenas as duas primeiras operações mencionadas acima, vemos que elas apresentam uma série de propriedades em comum, quer envolvam vetores, quer matrizes ou números complexos. Vamos então generalizar esses objetos para podermos lidar com eles sem termos de necessariamente definir explicitamente sua natureza ou a natureza das operações de multiplicação.

Um *espaço vetorial* é uma estrutura algébrica constituída por um conjunto V de elementos chamados *vetores* e duas operações, *adição* entre dois de seus elementos, denotada pelo símbolo $+$, e a *multiplicação por escalar*, que se dá entre um elemento (denominado escalar) de um corpo $\mathbb{K}$ dado e um vetor e resulta em outro vetor, denotada por $\cdot$ (um ponto centralizado na linha) ou, quando não há ambiguidade, pela justaposição do elemento do corpo e do vetor sendo multiplicados. Rigorosamente, temos a seguinte definição:

DEFINIÇÃO 1.2 (ESPAÇO VETORIAL)**:** Um conjunto não-vazio V, associado a uma operação binária de *adição* e uma *multiplicação por escalares*, é um espaço vetorial sobre o corpo $\mathbb{K}$ se, e somente se, obedecer aos seguintes axiomas (sejam $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ os escalares e $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \in V$ os vetores):

1. **Fechamento por adição**: A adição entre dois elementos $\boldsymbol{u}$ e $\boldsymbol{v}$ quaisquer de V resulta em um *único* elemento de V, denotado por $\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}$ e chamado de *soma* de $\boldsymbol{u}$ e $\boldsymbol{v}$.

2. **Fechamento por multiplicação por escalar**: A multiplicação entre um elemento $\alpha \in \mathbb{K}$, denominado *escalar*, e um elemento $\boldsymbol{u} \in V$ resulta em um *único* elemento de V, denotado por $\alpha \cdot \boldsymbol{u}$ (ou $\alpha\boldsymbol{u}$), chamado *produto* de α e $\boldsymbol{u}$.

3. **Comutatividade da adição**: $\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v} = \boldsymbol{v} + \boldsymbol{u}$

4. **Associatividade da adição**: $\boldsymbol{u} + (\boldsymbol{v} + \boldsymbol{w}) = (\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}) + \boldsymbol{w}$

5. **Existência da identidade da adição**: Existe um elemento em V, denotado por $\mathbf{0}$ e chamado de *vetor nulo* tal que $\boldsymbol{u} + \mathbf{0} = \boldsymbol{u}$ para todo $\boldsymbol{u} \in V$.

6. **Existência do oposto**: Para cada elemento $\boldsymbol{u} \in V$ existe um elemento, chamado *oposto* de $\boldsymbol{u}$ e denotado por $(-\boldsymbol{u})$, tal que $\boldsymbol{u} + (-\boldsymbol{u}) = 0$.

7. **Associatividade da multiplicação por escalares**: $\alpha(\beta\boldsymbol{u}) = (\alpha\beta)\boldsymbol{u}$

8. **Distributividade da soma de escalares**: $(\alpha + \beta)\boldsymbol{u} = \alpha\boldsymbol{u} + \beta\boldsymbol{u}$

9. **Distributividade da soma de vetores**: $\alpha(\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}) = \alpha\boldsymbol{u} + \alpha\boldsymbol{v}$

10. **Unidade**: $1 \cdot \boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}$, onde 1 é a unidade do corpo $\mathbb{K}$.

De forma análoga aos corpos, qualquer conjunto dotado das operações de adição e de multiplicação por escalar que satisfaça aos axiomas acima pode ser considerado um espaço vetorial. Basta também que o conjunto em consideração não satisfaça a qualquer dos axiomas para que não possa ser considerado um espaço vetorial.

Exemplo 1.2.1*:* O conjunto $\mathbb{R}^n$, das n-uplas de números reais: $(v_1, \dots, v_n)$, $v_i \in \mathbb{R}$, é um espaço vetorial real, com a adição e multiplicação por escalar usuais.

Demonstração. Fica como exercício. ■

Exemplo 1.2.2*:* O conjunto $\mathbb{C}$ dos números complexos, com a adição usual de números complexos e a multiplicação $\alpha\boldsymbol{u}$ usual entre o número real α e o número complexo $\boldsymbol{u} = (a+bi)$ é um espaço vetorial sobre o corpo dos reais. Nesta notação a e b são números reais e $i^2 = -1$.

Demonstração. Exercício. ■

Capítulo 2

Base e Dimensão

2.1 Combinações lineares

Em breve.

2.2 Dependência linear

Em breve.

2.3 Conjunto gerador

Em breve.

2.3.1 Espaços finitamente gerados

Em breve.

2.4 Bases

Definição 2.1 (Base)**:** Um conjunto $B \subset V$ será base do espaço vetorial V se e somente se:

- $[B] = V$, ou seja, B é conjunto gerador de V.
- B é linearmente independente (L.I.)

No caso de espaços não finitamente gerados, precisamos ajustar a definição de base:

DEFINIÇÃO 2.2 (BASE DE ESPAÇO NÃO FINITAMENTE GERADO)**:** B é base de V se e somente se:

- Para qualquer $\boldsymbol{v} \in V$ existem $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ tais que $\boldsymbol{v} = \alpha_1\boldsymbol{v}_1 + \cdots + \alpha_n\boldsymbol{v}_n$. Ou seja, B é gerador de V.

- Nenhum subconjunto de B é L.D.

Teorema 2.1. *Seja $S = \{\boldsymbol{v}_i, \ldots, \boldsymbol{v}_n\}$, todos não-nulos, que geram o espaço vetorial V. Existe B, base de V contida em S.*

Demonstração. Como S é gerador de V, se S for L.I., então $B = S$.

Senão, S é L.D. e existe algum $\boldsymbol{v}_i \in S$ que é combinação linear dos demais elementos de S. Removemos $\boldsymbol{v}_i$ do conjunto e esse novo conjunto continua sendo gerador de V. Se esse novo conjunto for L.I., ele será base, contido em S. Senão, haverá algum outro vetor $\boldsymbol{v}_j$ que é combinação dos demais vetores restantes e poderá ser removido, assim por diante até obtermos um subonjunto L.I. de S, com r vetores, $r \leqslant n$, que é base de V. ■

Isso significa que todo conjunto gerador de um espaço vetorial contém uma base desse espaço. Ou seja, as bases de um espaço vetorial possuem um número de elemenos *menor ou igual* ao dos conjuntos geradores.

Agora, veremos que qualquer conjunto de vetores com mais elementos que um conjunto gerador do espaço vetorial é, obrigatoriamente, L.D.:

Teorema 2.2. *Se o espaço vetorial V é gerado por um conjunto de n vetores $\{\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n\}$, então qualquer conjunto com mas de n vetores de V é L.D.*

Esboço da demonstração. Se $V = [\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n]$, então todos os vetores de V são combinação linear desses, então qualquer novo vetor acrescentado a esse conjunto será combinação linear dos vetores ali presentes e o conjunto será L.D. ■

Parte II

Espaços com produto interno

Capítulo 3

Produto Interno

3.1 Definição

Em breve.

3.2 Exemplos

Em breve.

3.3 Propriedades do produto interno

Teorema 3.1 (Desigualdade de Cauchy-Schwarz)**.** *Seja V um espaço vetorial (real ou complexo) dotado de produto interno. Então vale, entre quaisquer vetores $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in V$, a seguinte desigualdade:*

$$|\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \rangle|^2 \leqslant \langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{u} \rangle \langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{v} \rangle, \tag{3.3.1}$$

em que a igualdade vale se e somente se $\boldsymbol{u}$ e $\boldsymbol{v}$ forem L.D.

Demonstração. Se $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{0}$ ou $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{0}$, então temos zero dos dois lados da desigualdade e ela está comprovada. Consideremos então $\boldsymbol{u} \neq \boldsymbol{0}$ e $\boldsymbol{v} \neq \boldsymbol{0}$.

Nesse caso, sabemos pelo quarto axioma do produto interno que $\langle \boldsymbol{w}, \boldsymbol{w} \rangle \geqslant 0$ para todo $\boldsymbol{w} \in V$. Em particular, isso vale para $\boldsymbol{w} = \alpha\boldsymbol{u} + \beta\boldsymbol{v}$:

$$\begin{aligned}
\langle \boldsymbol{w}, \boldsymbol{w} \rangle &= \langle \alpha\boldsymbol{u} + \beta\boldsymbol{v}, \alpha\boldsymbol{u} + \beta\boldsymbol{v} \rangle \\
&= \langle \alpha\boldsymbol{u}, \alpha\boldsymbol{u} \rangle + \langle \alpha\boldsymbol{u}, \beta\boldsymbol{v} \rangle + \langle \beta\boldsymbol{v}, \alpha\boldsymbol{u} \rangle + \langle \beta\boldsymbol{v}, \beta\boldsymbol{v} \rangle \\
&= \overline{\alpha}\alpha \langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{u} \rangle + \overline{\alpha}\beta \langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \rangle + \overline{\beta}\alpha \langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{u} \rangle + \overline{\beta}\beta \langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{v} \rangle \\
&\geqslant 0.
\end{aligned}$$

A expressão acima vale para quaisquer α e β, então deve valer também se *escolhermos* $\alpha = \langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{v} \rangle$, e ficamos com:

$$\begin{aligned}
\langle \boldsymbol{w}, \boldsymbol{w} \rangle &= \overline{\langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{v} \rangle} \langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{v} \rangle \langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{u} \rangle + \overline{\langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{v} \rangle} \beta \langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \rangle + \overline{\beta} \langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{v} \rangle \langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{u} \rangle + \overline{\beta}\beta \langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{v} \rangle \\
&= \langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{v} \rangle \langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{v} \rangle \langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{u} \rangle + \langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{v} \rangle \beta \langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \rangle + \overline{\beta} \langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{v} \rangle \langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{u} \rangle + \overline{\beta}\beta \langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{v} \rangle \\
&= \langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{v} \rangle \langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{u} \rangle + \beta \langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \rangle + \overline{\beta} \langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{u} \rangle + \overline{\beta}\beta \\
&\geqslant 0,
\end{aligned}$$

já que $\langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{v} \rangle$ é fator comum e não-nulo da expressão. Agora, podemos *escolher* $\beta = -\langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{u} \rangle$ e, com isso, $\overline{\beta} = -\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \rangle$:

$$\begin{aligned}
\langle \boldsymbol{w}, \boldsymbol{w} \rangle &= \langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{v} \rangle \langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{u} \rangle + \beta \langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \rangle + \overline{\beta} \langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{u} \rangle + \overline{\beta}\beta \\
&= \langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{v} \rangle \langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{u} \rangle - \cancel{\langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{u} \rangle \langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \rangle} - \langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \rangle \langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{u} \rangle + \cancel{\langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{u} \rangle \langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \rangle} \\
&= \langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{v} \rangle \langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{u} \rangle - \langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \rangle \langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{u} \rangle \\
&\geqslant 0.
\end{aligned}$$

Finalmente, reorganizando os termos,

$$\begin{aligned}
\langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{v} \rangle \langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{u} \rangle - \langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \rangle \langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{u} \rangle &\geqslant 0 \\
\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \rangle \langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{u} \rangle &\leqslant \langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{v} \rangle \langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{u} \rangle \\
\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \rangle \overline{\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \rangle} &\leqslant \langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{v} \rangle \langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{u} \rangle \\
|\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \rangle|^2 &\leqslant \langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{v} \rangle \langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{u} \rangle .
\end{aligned}$$

Note que a igualdade, desde o começo, só vale se $\boldsymbol{w} = \boldsymbol{0}$, o que só ocorre, com α e β não nulos, se $\boldsymbol{u}$ e $\boldsymbol{v}$ forem L.D. (Verifique!) ■

Capítulo 4

Norma, distância e ângulo

Capítulo 5

Ortogonalidade