

Atividade 7: Estimativas de ângulos e distâncias

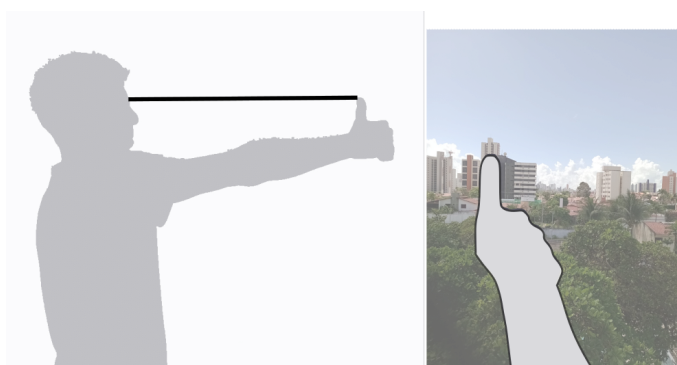
Objetivos:

- 1) Capacitar os estudantes para a estimativa de ângulos em radianos e graus.
- 2) Trabalhar conceitos da trigonometria.
- 3) Apresentar o procedimento de aproximação de funções.
- 4) Capacitar os estudantes para a estimativa da distância de objetos distantes usando paralaxe, com aplicações em astronomia.

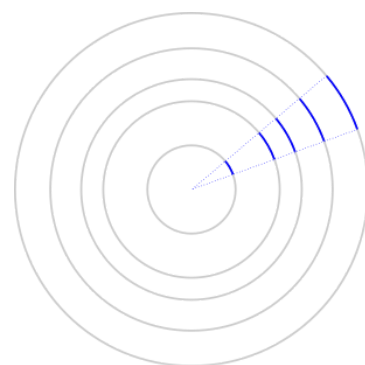
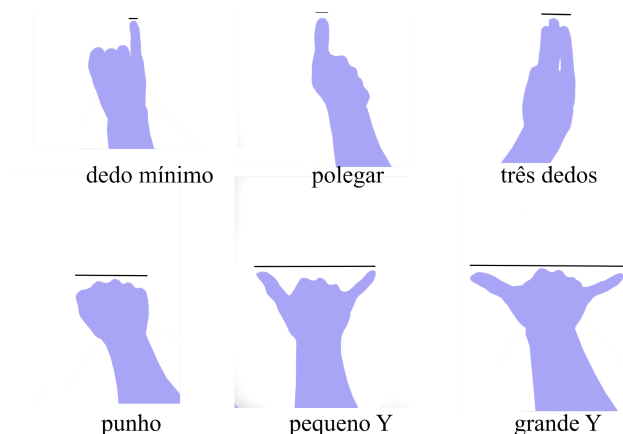
Materiais: régua, trena

Usando o corpo para estimar ângulos

A extensão dos objetos à nossa volta determina um ângulo de visão. Por exemplo, na imagem abaixo, um prédio distante determina aproximadamente o mesmo ângulo que o dedo polegar da pessoa, numa posição com o braço esticado.



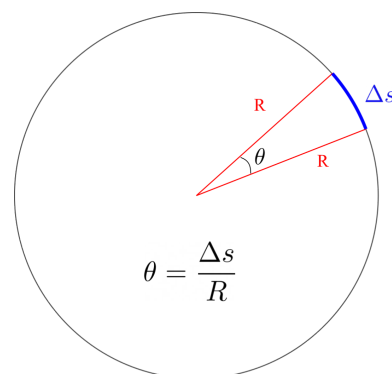
É útil calibrar nossa visão para medidas de ângulos usando uma das mãos em diferentes posições:



Radiano: a unidade natural de ângulo

Um arco é um trecho da circunferência. Ao lado, exibimos vários arcos com algo em comum, que é o que chamamos de ângulo. Por definição, o ângulo (em radianos) é a razão entre o comprimento de arco e o raio do círculo. É comum expressar essa relação assim:

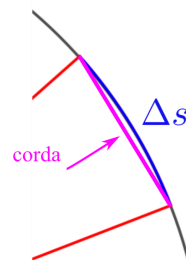
$$\Delta s = R \theta.$$



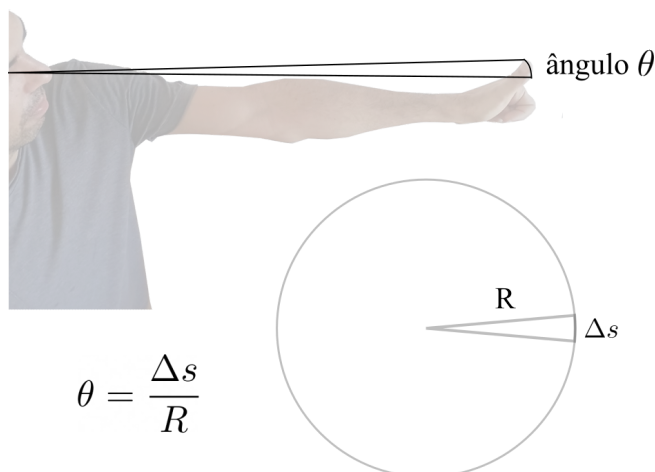
Perceba que para definir ângulos em radianos não precisamos lançar mão de divisões arbitrárias da circunferência, por exemplo, em 360 partes. O radiano é uma unidade natural de ângulo.

Por definição, 1 radiano corresponde à abertura em que o arco é igual ao raio. Qual é o ângulo em radianos que corresponde a toda a circunferência?

Perceba na figura ao lado que o comprimento da **corda** se aproxima do comprimento do arco para pequenos comprimentos de arco.



Vamos ver como fica a medida do ângulo determinado pelo polegar. Com o braço esticado na altura dos olhos, o raio R será a distância do olho até o dedo



Como vimos, para pequenos ângulos, o arco será a largura da posição feita com a mão. No exemplo acima, seria a espessura do polegar.

Use a definição de ângulo em radianos e uma régua para medir os comprimentos relevantes e estimar os ângulos determinados pelas posições feitas com a mão. Meça também o tamanho de uma passada de referência, que será útil na sequência do roteiro.

Comprimento do braço (cm):

Comprimento do passo de referência (cm):

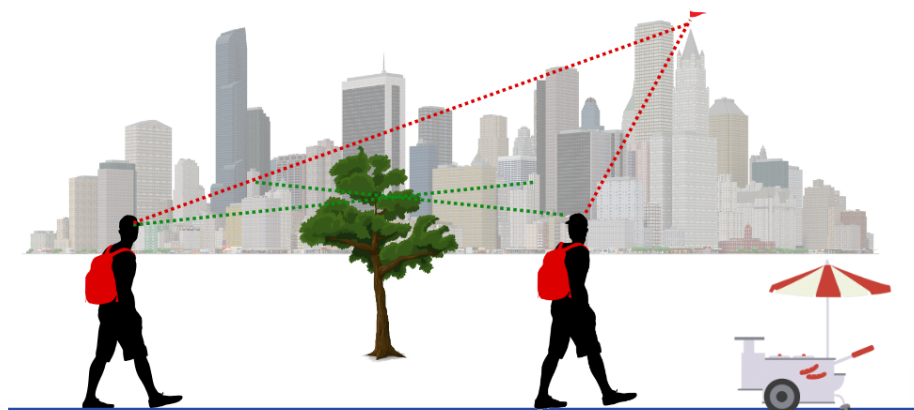
Posição	Dimensão (cm)	Ângulo (radianos)	Ângulo (graus)	Inverso do ângulo (1/rad)
dedo mínimo				
polegar				
três dedos				
punho				
pequeno Y				
grande Y				

Para converter entre graus e radianos, use a relação de proporcionalidade:

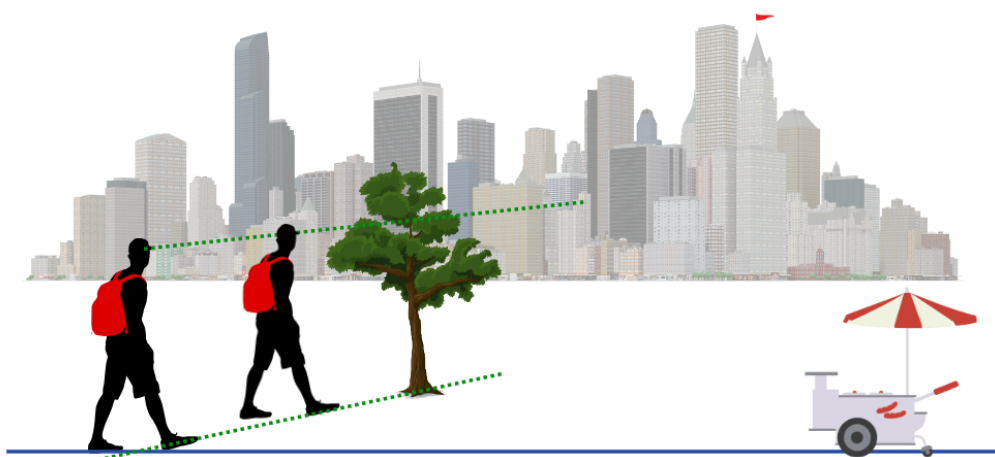
$$\frac{\text{ângulo em radianos}}{\text{ângulo em graus}} = \frac{\pi}{180}$$

Usando ângulos para estimar distâncias

Quando nos deslocamos, os corpos que estão à nossa volta mudam de posição uns em relação aos outros. Esse efeito é denominado **paralaxe**.



Na figura acima, enquanto caminha pela rua olhando para a árvore, o rapaz precisa girar o pescoço. Ele teria que girar muito menos caso caminhasse olhando para a bandeira no topo do prédio distante.



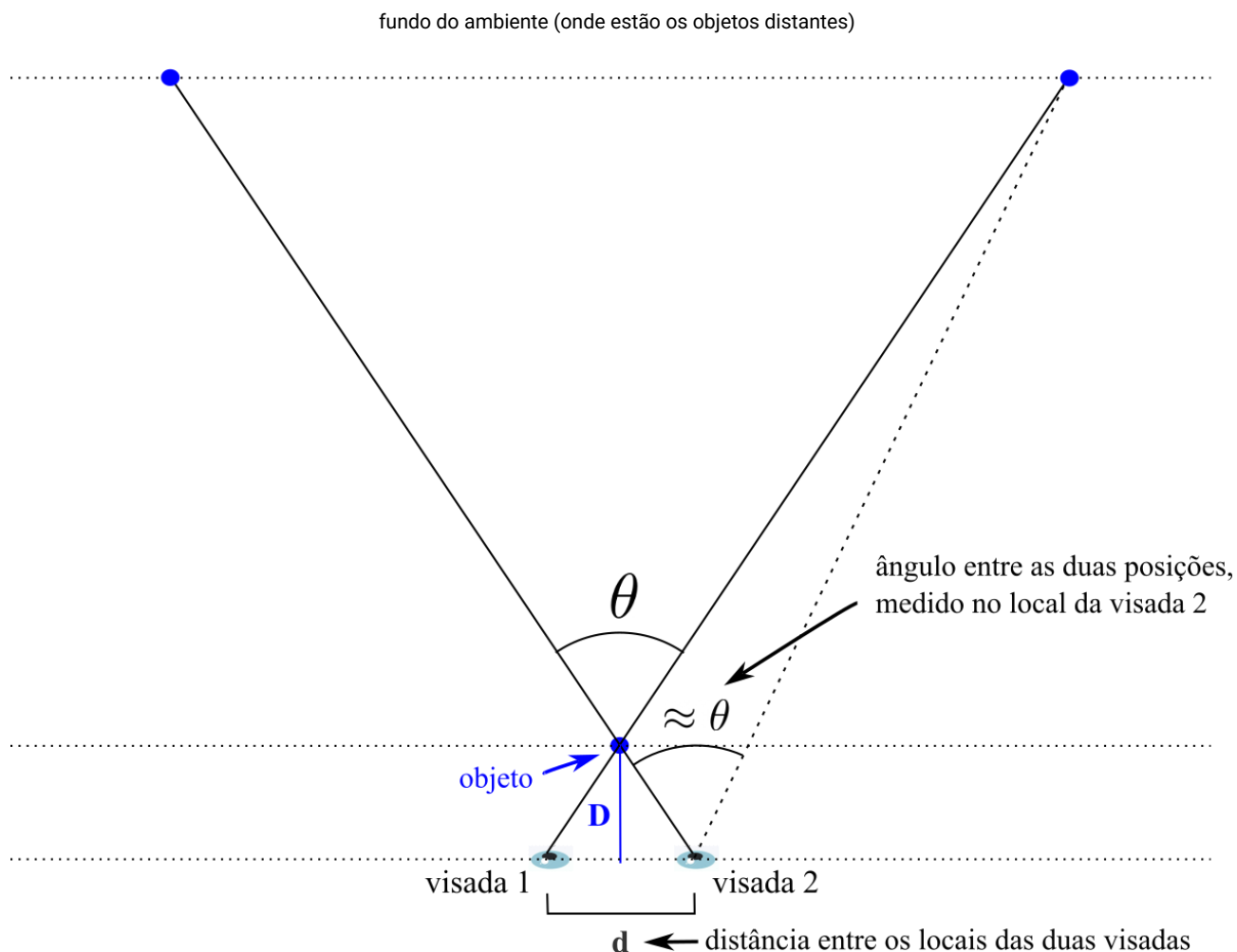
Atenção! Quando o observador caminha em direção ao objeto, o ângulo de visada não muda. No exemplo acima, enquanto caminha em direção à árvore olhando para a árvore, o observador não precisa girar a cabeça.

Vamos usar relações geométricas para determinar essa relação entre o ângulo, o deslocamento d entre duas visadas e a distância D do objeto ao observador.

Na análise que vamos fazer agora, consideraremos que o observador está se movendo perpendicularmente em relação à linha de visada do objeto. O procedimento será o seguinte:

- 1) Localizar um objeto de referência cuja distância de você será estimada.
- 2) (Visada 1): Alinhar um ponto de referência do objeto a um ponto de referência de um objeto distante.
- 3) Deslocar-se numa direção aproximadamente perpendicular à visada do objeto, estimando o comprimento do deslocamento feito.
- 4) (Visada 2): Alinhar o ponto de referência do objeto a um ponto de referência de um objeto distante.
- 5) Estimar (com uma das posições da mão - ver tabela) o ângulo determinado pelos dois pontos de referência distantes.

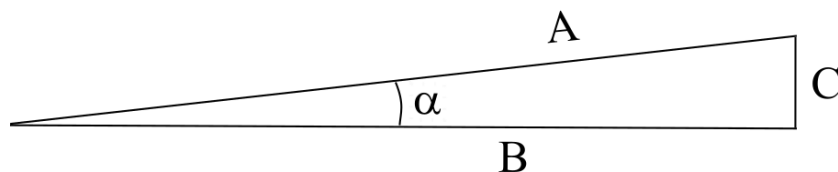
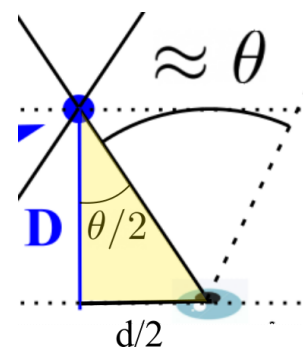
A representação geométrica do procedimento está ilustrada na figura a seguir:



Ao lado, está representado o detalhe de uma parte da figura anterior, destacando um triângulo e quantidades relevantes para deduzir a relação desejada:

$$\tan \frac{\theta}{2} = \frac{\text{cateto oposto}}{\text{cateto adjacente}} = \frac{d/2}{D}$$

Quando os ângulos envolvidos são pequenos, podemos calcular a tangente de maneira muito direta, como veremos agora.



No triângulo acima, dizer que o ângulo α é pequeno significa que o lado A é aproximadamente igual ao lado B. Portanto, é como se A e B fossem raios de uma circunferência e o lado C fosse uma **corda**.

O ângulo é dado pelo arco (aproximadamente a corda C) dividido pelo raio (A ou B):

$$\alpha \simeq \frac{C}{B} = \frac{\text{cateto oposto}}{\text{cateto adjacente}} = \tan \alpha \quad \text{e} \quad \alpha \simeq \frac{C}{A} = \frac{\text{cateto oposto}}{\text{hipotenusa}} = \sin \alpha$$

Portanto, obtemos a importante relação:

$$\text{Se } \alpha \ll 1, \text{ então } \alpha \simeq \sin(\alpha) \simeq \tan(\alpha).$$

Verifique na calculadora essa aproximação para os ângulos correspondentes às 6 posições da mão.

Aplicando essa aproximação para o triângulo do nosso problema, obtemos:

$$\frac{\theta}{2} \simeq \frac{d/2}{D} \text{ de modo que } D \simeq \frac{d}{\theta}.$$

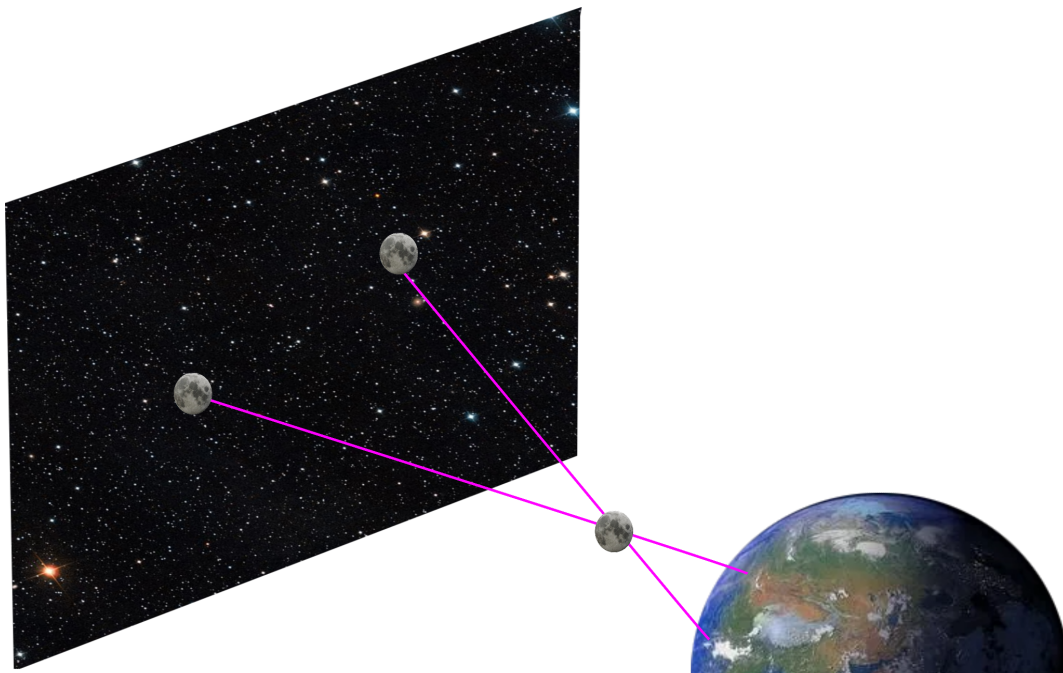
Portanto, sabendo estimar ângulos e pequenos deslocamentos, podemos estimar a distância de objetos de maneira muito simples.

Para o cálculo de distâncias, é conveniente conhecer o valor aproximado da quantidade 1/ângulo, para cada uma das posições usadas com a mão para estimar ângulos. Conhecendo essas quantidades, podemos obter a distância dos objetos como um simples produto.

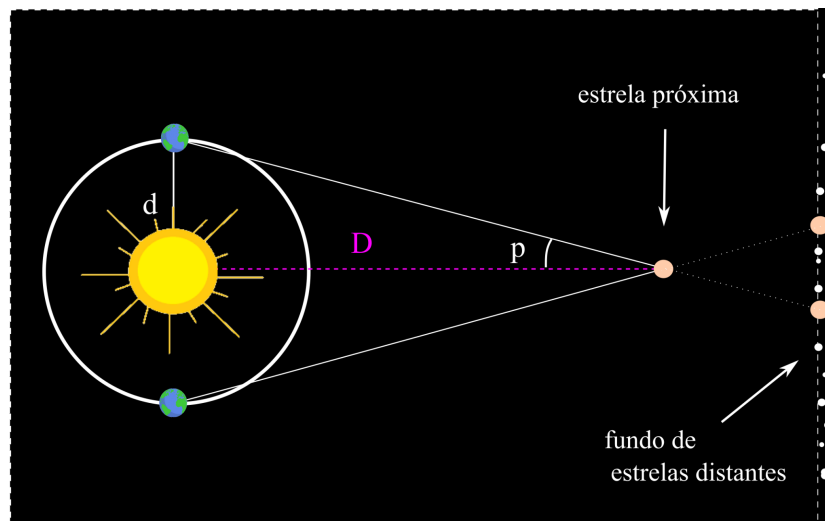
Medidas de distâncias astronômicas

A técnica de medir distâncias por paralaxe é muito importante para determinar a distância de um astro até o nosso planeta. Evidentemente, não podemos esperar que a posição dos astros mude quando nos movemos alguns metros para o lado.

Porém, quando observamos a Lua a partir de dois lugares distantes da Terra, sua posição em relação às estrelas muda devido à paralaxe. Hiparco, por volta de 190 a.C. usou a diferença na quantidade de luz em um eclipse solar entre o Egito e a Turquia para estimar a distância da Terra à Lua em um cálculo idêntico ao apresentado neste texto.



As estrelas mais próximas ao sistema solar, estando mais próximas da Terra, se movem em relação ao fundo de estrelas mais distantes. Para observar esse efeito, faz-se a visada das estrelas quando a Terra está em pontos opostos da sua órbita, aproximadamente circular em torno do Sol.



Na imagem acima, a distância d é o raio da órbita da Terra, um tamanho definido como 1 **Unidade Astronômica** (1 U.A.). Pela expressão que deduzimos, temos (usando os parâmetros da figura):

$$D = \frac{1 \text{ U.A.}}{p}$$

O ângulo p é chamado de ângulo de paralaxe. A estrela mais próxima do Sistema Solar é Alfa-Centauro. Ela tem um ângulo de paralaxe $p = 0,0000037$ radiano. Isso corresponde a 0,77 segundo de grau. O **segundo de grau** é o grau dividido por 3600. Vê-se que a paralaxe estelar é um efeito muito difícil de se detectar.

Usando que 1 U.A. é aproximadamente $1,49 \times 10^{11}$ m, obtemos que a distância de Alfa-Centauro é cerca de 4×10^{16} m.

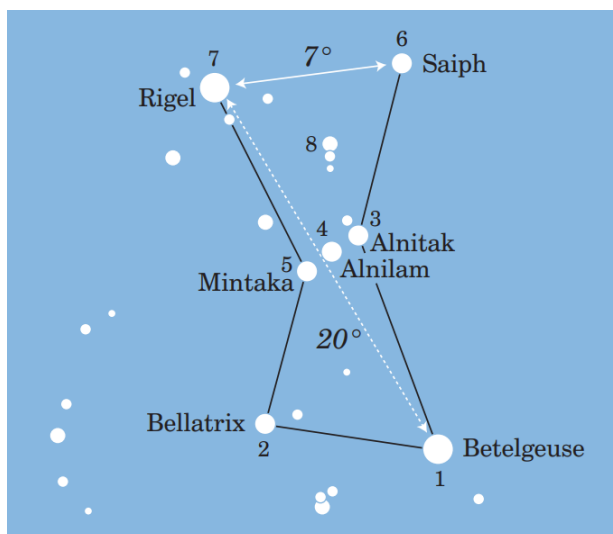
A paralaxe estelar é usada para definir uma distância muito útil em astrofísica: o **parsec** (símbolo: pc). Por definição, uma estrela está a uma distância de 1 parsec da Terra quando seu ângulo de paralaxe (entre os extremos da órbita da Terra) é de 1 segundo de arco. Pelo que foi dito acima, a estrela alfa-centauro está a uma distância de mais de 1 parsec, mas especificamente: $1/0,77$ pc (cerca de 1,3 pc).

O importante astrônomo Tycho Brahe, que viveu no século XVI, procurou por efeitos de paralaxe estelar. Pelo fato de não dispor de equipamentos precisos o suficiente para observar a paralaxe, Tycho concluiu que a Terra não deveria se mover no espaço, o que estava em contradição com o modelo de Copérnico.

Quanto mais precisas as medidas dos ângulos das estrelas, mais precisão se consegue na determinação das distâncias. Na década de 1990, a missão Hiparcus da Agência Espacial Europeia calculou a distância de mais de um milhão de estrelas próximas fazendo medidas precisas de ângulos usando equipamentos no espaço, fora da atmosfera terrestre. Na próxima década, uma missão muito mais precisa da NASA prevê calcular a distância de estrelas muito mais distantes, englobando toda a Via Láctea e galáxias vizinhas.

Informações Extras

1) Ângulos na constelação de Orion. O ângulo entre as maiores estrelas desta constelação (Rigel e Betelgeuse) é cerca de 20° . O ângulo determinado pelas “três Marias” é 3° .



Fonte: livro “A Walk through the Heavens: A Guide to Stars and Constellations and their Legends”, de Milton D. Heifetz e Wil Tirion. Ed. Cambridge University Press.

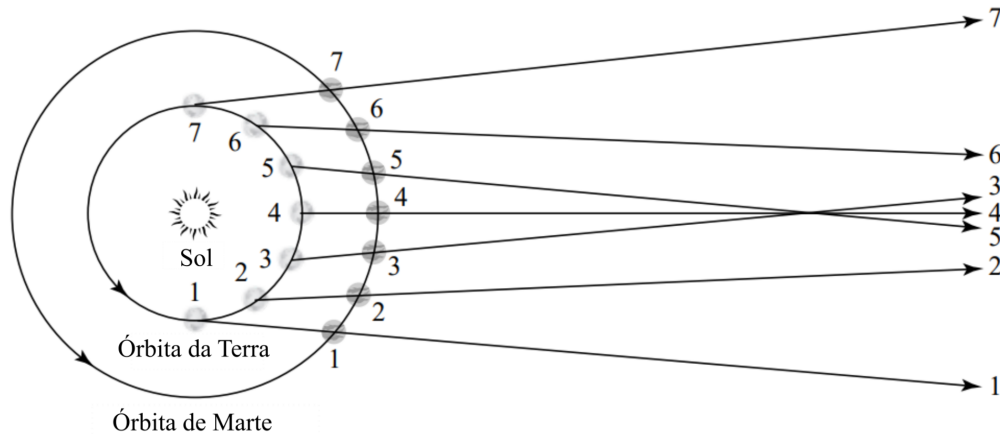
2) As estrelas parecem habitar uma esfera (chamada de esfera celeste), como se todas estivessem a uma mesma distância da Terra. Isso acontece porque as estrelas estão tão distantes que não temos noção de profundidade. Na realidade, as estrelas estão a diferentes distâncias do nosso planeta, como sugere a figura abaixo. Além de distantes entre si, as estrelas se movem.



Fonte: All About Space Magazine.

3) Distância da Terra a Marte

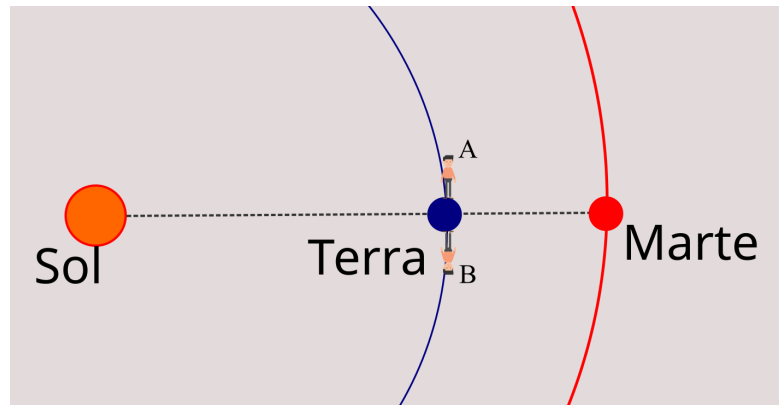
Marte é um planeta facilmente observável no céu. A figura abaixo representa o chamado “movimento retrógrado” de Marte, conhecido desde a antiguidade, e que também acontece com Júpiter e Saturno.



Quando existe o alinhamento do Sol, da Terra e de Marte (nesta ordem, como na posição 4), dizemos que Marte está em oposição. É o momento em que a aproximação entre os planetas é máxima. Note que os dois planetas giram no mesmo sentido em relação ao Sol.

A figura acima e o exercício seguinte foram retirados do livro “An Introduction to Modern Astrophysics”, de Bradley W. Carroll, Dale A. Ostlie (2017, Cambridge University Press).

Considere dois observadores A e B na Terra que estão diametralmente opostos, como na figura ao lado. Eles observam Marte ao mesmo tempo exatamente quando Marte está em oposição de fase e medem uma diferença de ângulo de $33,6''$ em relação às estrelas distantes, devido à paralaxe.



(a) Sabendo que o raio da Terra é $6,4 \times 10^7$ m, estime a distância que Marte está da Terra.

(b) (desafio) Se as velocidades orbitais da Terra e de Marte são $29,79$ km/s e $24,13$ km/s, respectivamente, em que intervalo de tempo Marte percorre um ângulo de 10% de $33,6''$ quando visto de um local fixo? A capacidade de sincronizar relógios entre os observadores A e B é fundamental para a medida precisa da distância por paralaxe.

Habilidades trabalhadas

- hb1.1 Realizar cálculos mentais com as quatro operações para fazer estimativas razoáveis e rápidas em discussões de C&T.
- hb1.2 Simplificar expressões algébricas envolvendo as quatro operações, potências, regras de precedência, uso de parênteses.
- hb1.3 Saber ler escalas, calcular porcentagens e arredondar números corretamente.
- hb1.4 Fazer cálculos e estimativas de ângulos, comprimentos, áreas e volumes usando geometria e trigonometria básica.
- h1.12 Saber operar calculadora científica para operações básicas.
- hb7.1 Saber operar instrumentos simples como réguas, balanças, sensores de tempo, etc.
- hb7.3 Identificar as quantidades relevantes para a análise em problemas práticos simples, bem como a diferente complexidade da análise das diferentes quantidades.
- hb7.4 Desenvolver atitude ativa na operação de instrumentos de medida.