

Lista de exercícios 1

Cálculo II

$$(g) \int_0^{t_f} \frac{F}{M - kt} dt$$

$$(h) \int_0^{t_f} \frac{F}{k} \ln \left(\frac{M}{M - kt} \right) dt$$

$$g) \int_0^{t_f} \frac{F}{M - kt} dt$$

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C$$

$$\begin{cases} u = M - kt \\ du = -k dt \Rightarrow dt = \frac{du}{-k} \end{cases}$$

$$\begin{cases} t = 0 \Rightarrow u = M = u_0 \\ t = t_f \Rightarrow u = M - kt_f = u_f \end{cases}$$

$$\int_0^{t_f} \frac{F}{M - kt} dt = \int_{u_0}^{u_f} \frac{F}{u} \frac{du}{-k} = -\frac{F}{k} \int_{u_0}^{u_f} \frac{du}{u}$$

$$= -\frac{F}{k} \left[\ln|u| \right]_{u_0}^{u_f}$$

$$= -\frac{F}{k} \left[\ln|u_f| - \ln|u_0| \right]$$

$$= -\frac{F}{k} \left[\underbrace{\ln |M - kt_f|}_{\substack{>0 \\ (\text{masse})}} - \underbrace{\ln |M|}_{>0} \right]$$

$$= \frac{F}{k} \left[\ln(M) - \ln(M - kt_f) \right]$$

$$= \frac{F}{k} \ln \left(\underbrace{\frac{M}{M - kt_f}}_{>1} \right)$$

acceleration

$$\int_0^{t_f} \frac{F}{M - kt} dt = \frac{F}{k} \ln \left(\frac{M}{M - kt_f} \right)$$

velocity

deslocamento

$$(h) \int_0^{t_f} \frac{F}{k} \ln \left(\frac{M}{M - kt} \right) dt$$

$$\int \ln(x) dx = \int 1 \cdot \ln x dx$$

$$u = \ln(x) \Rightarrow du = \frac{1}{x} dx$$

$$dv = 1 dx \Rightarrow v = \int dv = \int 1 dx = x$$

$$\int u dv = uv - \int v du$$

$$\int_a^b u \, dv = [uv]_a^b - \int_a^b v \, du$$

$$\int \ln x \, dx = x \ln x - \int x \frac{1}{x} \, dx$$

$$\boxed{\int \ln x \, dx = x \ln x - x + C}$$

$$(h) \int_0^{t_f} \frac{F}{k} \ln \left(\frac{M}{M-kt} \right) dt = \frac{F}{k} \int_{x_0}^{x_f} \ln(x) \left(\frac{dx}{dt} \right) dt$$

$$\begin{cases} x = \frac{M}{M-kt} \\ dx = \frac{M}{(M-kt)^2} (-k) dt \end{cases}$$

FE10
RUM
DIFFICIL!

X

M and/or t plumeridor.

$$\ln \left(\frac{M}{M-kt} \right) = \ln(M) - \ln(M-kt)$$

$$= - \left[\ln(M-kt) - \ln(M) \right]$$

$$= - \ln \left(\frac{M-kt}{M} \right)$$

$$(h) \int_0^{t_f} \frac{F}{k} \ln \left(\frac{M}{M-kt} \right) dt$$

$$= -\frac{F}{k} \int_0^{t_f} \ln \left(\frac{M-kt}{M} \right) dt$$

$$\begin{cases} x = \frac{M-kt}{M} \\ dx = -\frac{k}{M} dt \\ \underline{dt = -\frac{M}{k} dx} \end{cases}$$

$$\begin{cases} t=0 \Rightarrow x=1=x_0 \\ t=t_f \Rightarrow x = \frac{M-kt_f}{M} = x_f \end{cases}$$

$$= -\frac{F}{k} \left(-\frac{M}{k} \right) \int_{x_0}^{x_f} \ln(x) dx = \frac{FM}{k^2} \int_{x_0}^{x_f} \ln(x) dx$$

$$= \frac{FM}{k^2} \left[x \ln x - x \right]_{x_0}^{x_f} = \frac{FM}{k^2} \left[x (\ln x - 1) \right]_{x_0}^{x_f}$$

$$= \frac{FM}{k^2} \left[x_f (\ln x_f - 1) - \underbrace{x_0 (\ln x_0 - 1)}_{\substack{1 (\ln 1 - 1) \\ -1}} \right]$$

$$= \frac{FM}{k^2} \left[x_f (\ln x_f - 1) + 1 \right]$$

$$= \frac{FM}{k^2} \left[\frac{M - kt_f}{M} \left(\ln \left(\frac{M - kt_f}{M} \right) - 1 \right) + \frac{FM}{k^2} \right]$$

$$= \frac{F}{k^2} (M - kt_f) \left(\ln \left(\frac{M - kt_f}{M} \right) - 1 \right) + \frac{FM}{k^2} //$$

$$\text{So } t_f = 0$$

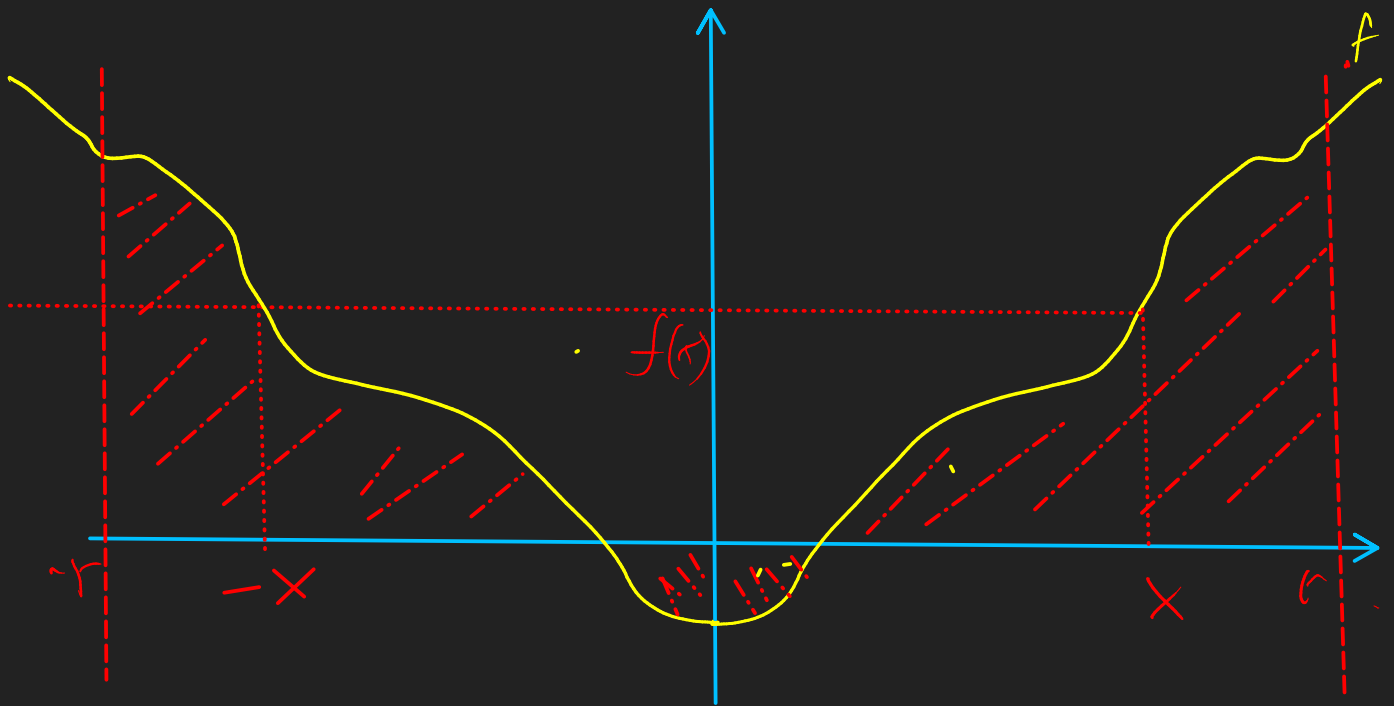
$$= \frac{F}{k^2} (M - 0) \left(\ln(1) - 1 \right) + \frac{FM}{k^2}$$

$$= -\frac{FM}{k^2} + \frac{FM}{k^2} = 0 //$$

$$\int_0^0 f(x) dx = 0.$$

4. Seja f uma função par $f(-x) = f(x)$ e contínua em $[-r, r]$, $r > 0$.

Mostre que $\int_{-r}^r f(x) dx = 2 \int_0^r f(x) dx$. Interprete graficamente este resultado.



$$\int_{-r}^r f(x) dx = 2 \int_0^r f(x) dx$$

Propriedades:

$$\int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx$$

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$$

$$\int_{-r}^r f(x) dx = \int_{-r}^0 f(x) dx + \int_0^r f(x) dx$$

Moz:

$$\int_{-r}^0 f(x) dx = - \int_0^{-r} f(x) dx$$

$$\begin{cases} u = -x \\ du = -dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \Rightarrow u = 0 \\ x = -r \Rightarrow u = r \end{cases}$$

$$- \int_0^{-r} f(x) dx = - \int_0^r f(-u) (-du)$$

$$= \int_0^r f(-u) du, \quad \left(\begin{array}{l} \text{mis } f \text{ é par} \\ f(-u) = f(u) \end{array} \right)$$

$$= \int_{-r}^0 f(x) dx = \int_0^r \underbrace{f(u)}_{\text{variável mud 2}} du = \int_0^r f(x) dx$$

$$\begin{aligned} \int_{-r}^+ f(x) dx &= \int_{-r}^0 f(x) dx + \int_0^+ f(x) dx \\ &= \int_0^r f(x) dx + \int_0^r f(x) dx \end{aligned}$$

□

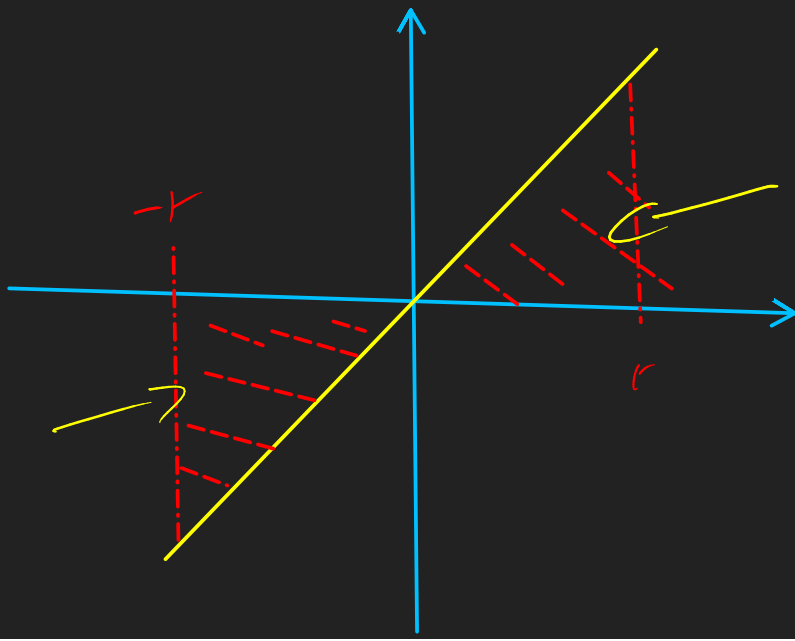
Se f é ímpar: $f(-x) = -f(x)$

$$\int_{-r}^r f(x) dx = 0$$

$$\int_{-r}^0 f(x) dx = \int_0^r f(-u) du = - \int_0^r f(u) du$$

$$\text{Mas } f \text{ ímpar} \Rightarrow f(-u) = -f(u)$$

$$\begin{aligned} \int_{-r}^r f(x) dx &= \int_{-r}^0 f(x) dx + \int_0^r f(x) dx \\ &= - \int_0^r f(x) dx + \int_0^r f(x) dx \\ &= 0 \end{aligned}$$



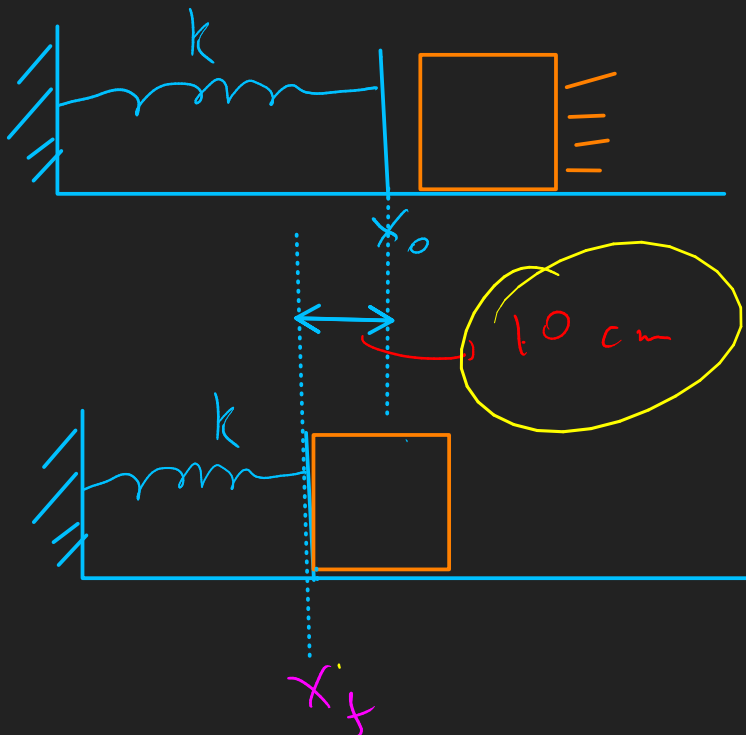
f par: $\int_{-r}^r f(x) dx = 2 \int_0^r f(x) dx$

f ímpar: $\int_{-r}^r f(x) dx = 0$

8. Um corpo em movimento colide com uma mola, que se comprime $\Delta x = 10$ cm até o instante em que o corpo pára. Nesse processo, a mola realiza trabalho $W = -1660$ J sobre o corpo.

Calcule a constante elástica k da mola, nos cenários em que, no início do processo, a mola se encontrava:

- (a) Relaxada.
- (b) Comprimida em 10 cm.
- (c) Estendida em 10 cm.
- (d) Estendida em 5 cm.



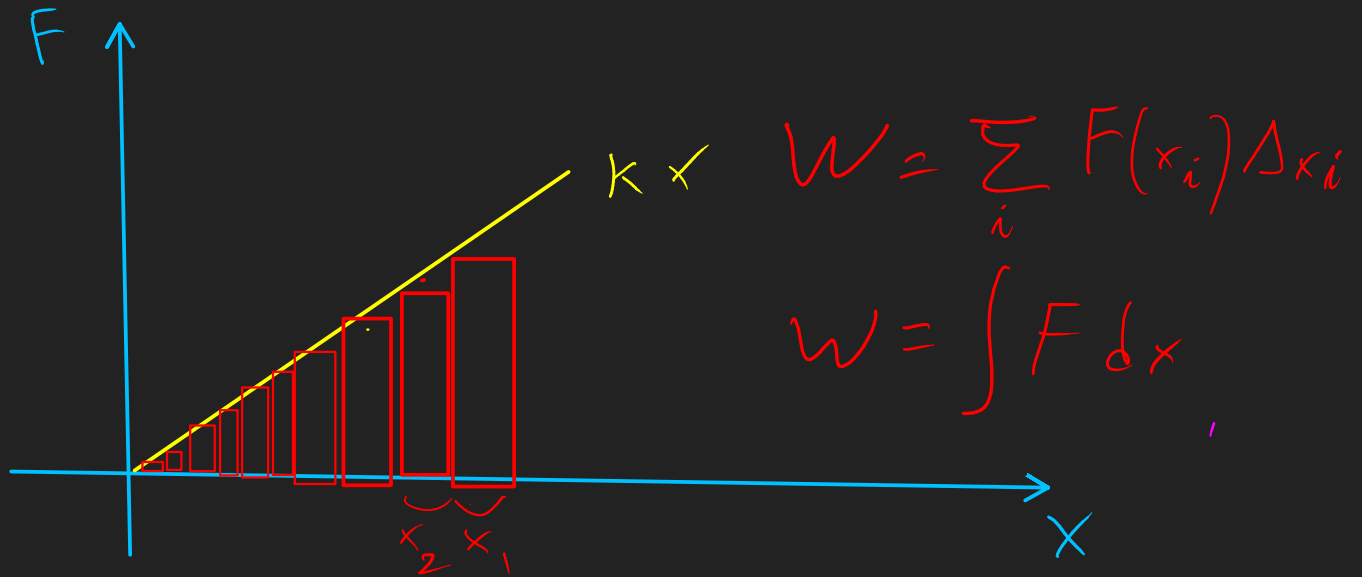
Trabalho da
força elástica:

$$F = -kx$$

$$W = \int_{x_0}^{x_f} F dx$$

$$W = \int_{x_0}^{x_f} -kx dx$$

$W = \vec{F} \cdot \vec{x}$
 $\vec{F}$ e $\vec{x}$ são
 vetores
 $\Rightarrow W = \vec{F} \cdot \vec{x}$

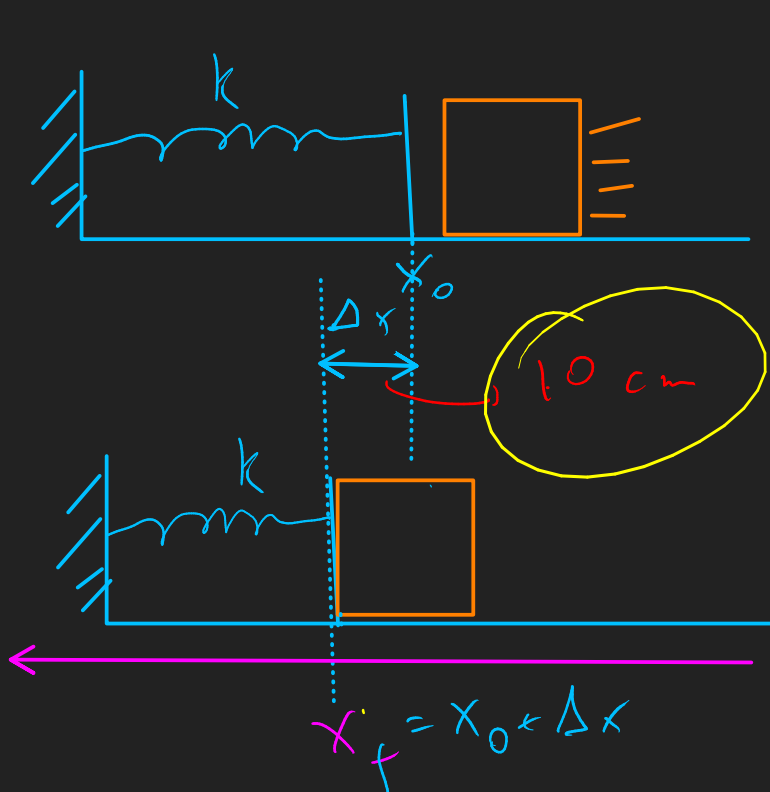


8. Um corpo em movimento colide com uma mola, que se comprime $\Delta x = 10 \text{ cm}$ até o instante em que o corpo pára. Nesse processo, a mola realiza trabalho $W = -1660 \text{ J}$ sobre o corpo.

Calcule a constante elástica k da mola, nos cenários em que, no início do processo, a mola se encontrava:

$$\Delta x = 10 \text{ cm} = 0,10 \text{ m}$$

$$W = -1660 \text{ J}$$



$$W = \int_{x_0}^{x_f} F dx \quad \leftarrow$$

$$= \int_{x_0}^{x_0 + \Delta x} -kx dx \quad \leftarrow$$

$$= -1660 \text{ J}$$

$$W = \int_{x_0}^{x_0 + \Delta x} -kx dx = -k \left[\frac{x^2}{2} \right]_{x_0}^{x_0 + \Delta x} = -1660 \text{ J}$$

(a) Relaxada.

(b) Comprimida em 10 cm.

(c) Estendida em 10 cm.

(d) Estendida em 5 cm.

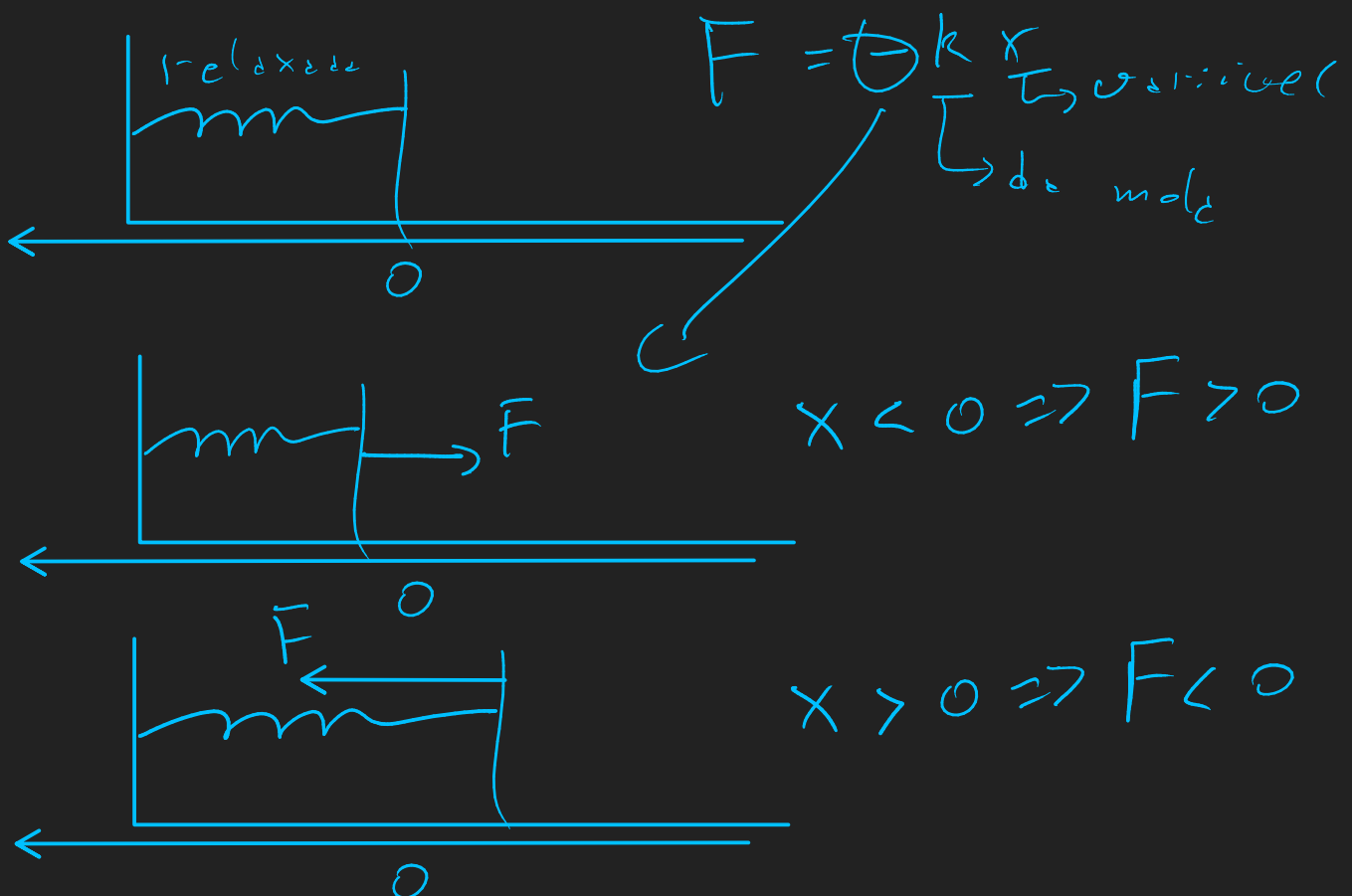
a) $x_0 = 0$

b) $x_0 = 10 \text{ cm} = 0,1 \text{ m}$

c) $x_0 = -10 \text{ cm} = -0,1 \text{ m}$

d) $x_0 = -5 \text{ cm} = -0,05 \text{ m}$

$$-1660 = -k \left[\frac{(x_0 + \Delta x)^2}{2} - \frac{x_0^2}{2} \right] \leftarrow$$



Taylor: $f(x) \approx \underbrace{f(x_0) + k_1 x}_{\text{1.º termo}} + \underbrace{k_2 x^2}_{\text{2.º termo}} + \dots$

- (a) Relaxada.
- (b) Comprimida em 10 cm.
- (c) Estendida em 10 cm.
- (d) Estendida em 5 cm.

$$a) x_0 = 0$$

$$b) x_0 = 10 \text{ cm} = 0,1 \text{ m}$$

$$c) x_0 = -10 \text{ cm} = -0,1 \text{ m}$$

$$d) x_0 = -5 \text{ cm} = -0,05 \text{ m}$$

$$-1660 = -k \left[\frac{(x_0 + \Delta x)^2}{2} - \frac{x_0^2}{2} \right] \quad \leftarrow$$

a, b, c, d

$$k = 2 \frac{1660}{[(x_0 + \Delta x)^2 - x_0^2]} = \frac{3320}{x_0^2 + 2x_0\Delta x + \Delta x^2 - x_0^2}$$

$$k = \frac{3320}{2x_0\Delta x + \Delta x^2} = \frac{3320}{2x_0(0,10) + (0,01)}$$

$$k = \frac{3320}{0,2x_0 + 0,01}$$

$$a) x_0 = 0 \Rightarrow k = \frac{3320}{0,01} = 33,20$$

$$b) x_0 = 0,1 \Rightarrow k = \frac{3320}{0,02 + 0,01} = \frac{3320}{0,03} = \frac{33,20}{3}$$

