

Lista 00

4. Um polinômio de grau n tem a forma geral

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 = \sum_{i=0}^n a_i x^i,$$

com $a_n \neq 0$. Obtenha a derivada de P .

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$$

$$\frac{d}{dx} P(x) = \frac{d}{dx} [a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0]$$

$$= \frac{d}{dx} a_n x^n + \frac{d}{dx} a_{n-1} x^{n-1} + \dots + \frac{d}{dx} a_1 x + \frac{d}{dx} a_0$$

$$= a_n \frac{dx^n}{dx} + \dots + a_1 \frac{dx}{dx} + a_0 \cdot \frac{d}{dx} 1$$

$$= a_n (n x^{n-1}) + a_{n-1} (n-1) x^{n-2} +$$

$$+ \dots + a_1 + 0$$

Polinômio de grau $n-1$

4. Um polinômio de grau n tem a forma geral

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = \sum_{i=0}^n a_i x^i,$$

sigma

com $a_n \neq 0$. Obtenha a derivada de P .

$$P(x) = \sum_{i=0}^n a_i x^i$$

$$\frac{d}{dx} \left[\sum_{i=0}^n a_i x^i \right] = \sum_{i=0}^n \frac{d}{dx} a_i x^i$$

$$= \sum_{i=0}^n a_i \frac{dx^i}{dx}$$

$$= \sum_{i=0}^n a_i (i) x^{i-1}$$

$$= \sum_{i=1}^n a_i i x^{i-1}$$

$$\text{Seja } k = i - 1$$

$$\frac{dP}{dx} = \sum_{k=0}^{n-1} \underbrace{a_{k+1} (k+1)} x^k$$

7. Calcule

(a) $\int x\sqrt{x^2+1} \, dx$

(c) $\int \frac{x}{\sqrt{x+1}} \, dx$

(e) $\int x e^{x^2} \, dx$

(b) $\int x \cos x^2 \, dx$

(d) $\int \sin x \cos^2 x \, dx$

(f) $\int x\sqrt{x^4+3} \, dx$

(d) $\int \sin x (\cos^2 x) \, dx$

$\begin{cases} u = \cos x \rightarrow 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2} \\ du = -\sin x \, dx \end{cases}$

$$\int \sin x (\cos x)^2 \, dx = \int -u^2 \, du$$

$$= -\int u^2 \, du = -\frac{u^3}{3} + k$$

$$= -\frac{\cos^3 x}{3} + k //$$

(e) $\int x e^{x^2} \, dx$

$\begin{aligned} u &= x^2 \\ du &= 2x \, dx \Rightarrow dx = \frac{du}{2x} \end{aligned}$

$$\int x e^{x^2} \, dx = \int e^u \frac{du}{2} = \frac{1}{2} \int e^u \, du$$

$$= \frac{1}{2} e^u + k$$

$$\int x e^{x^2} \, dx = \frac{1}{2} e^{x^2} + k$$

$$(f) \int \underline{x} \sqrt{x^4 + 3} \, \underline{dx}$$

$$\sqrt{x^2 + a^2} \leftarrow$$

$$\begin{cases} u = x^2 \\ du = 2x \, dx \end{cases}$$

$$\int x \sqrt{x^4 + 3} \, dx = \int \sqrt{u^2 + 3} \, \frac{du}{2}$$

$$= \frac{1}{2} \int \sqrt{u^2 + 3} \, du$$

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

$$\underline{\sec^2 x = 1 + \tan^2 x}$$

$$\begin{cases} u = \sqrt{3} \tan \theta \\ du = \sqrt{3} \sec^2 \theta \, d\theta \end{cases}$$

$$= \frac{1}{2} \int \sqrt{(\sqrt{3} \tan \theta)^2 + 3} \, \sqrt{3} \sec^2 \theta \, d\theta$$

$$= \frac{1}{2} \int \sqrt{3(\tan^2 \theta + 1)} \, \sqrt{3} \sec^2 \theta \, d\theta$$

$$= \frac{3}{2} \int \sqrt{\tan^2 \theta + 1} \, \sec^2 \theta \, d\theta$$

$$\int \sec^3 \theta d\theta = \sec \theta \tan \theta - \int \sec^3 \theta d\theta + \int \sec \theta d\theta$$

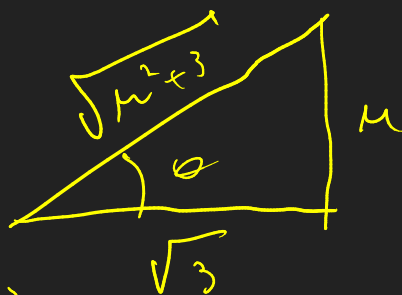
$$2 \int \sec^3 \theta d\theta = \sec \theta \tan \theta + \int \sec \theta d\theta$$

$$\int \sec \theta d\theta = \ln |\sec \theta + \tan \theta| + k$$

$$\int \sec^3 \theta d\theta = \frac{1}{2} \left[\sec \theta \tan \theta + \ln |\sec \theta + \tan \theta| \right] + k$$

$$(f) \int x \sqrt{x^4 + 3} dx$$

$$u = \sqrt{3} + \tan \theta \Rightarrow \tan \theta = \frac{CO}{CA} = \frac{u}{\sqrt{3}}$$



$$\tan \theta = \frac{u}{\sqrt{3}} = \frac{x^2}{\sqrt{3}}$$

$$\sec \theta = \frac{HYP}{CA} = \frac{\sqrt{u^2 + 3}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{x^4 + 3}}{\sqrt{3}}$$

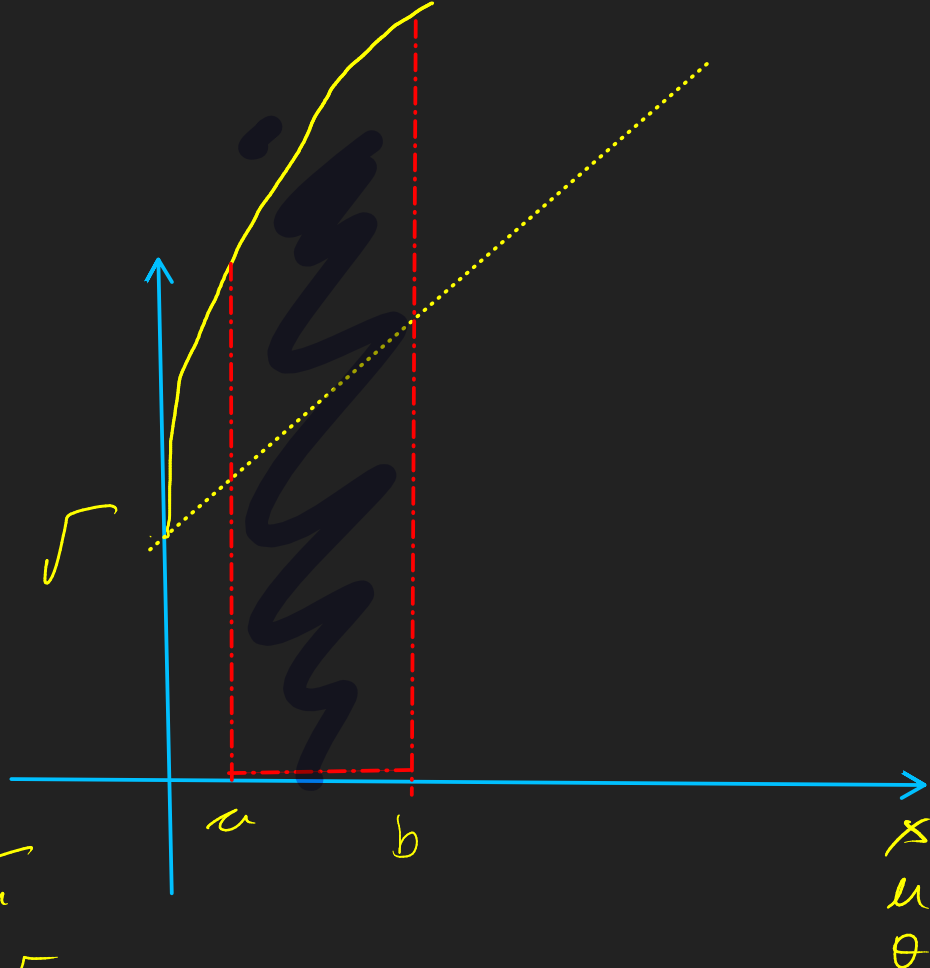
$$\frac{3}{4} \left[\sqrt{\frac{x^4 + 3}{3}} \cdot \frac{x^2}{\sqrt{3}} + \ln \left| \sqrt{\frac{x^4 + 3}{3}} + \frac{x^2}{\sqrt{3}} \right| \right] + k$$

$$(f) \int x \sqrt{x^4 + 3} \, dx$$

$$\int_a^b \dots dx$$

$$\begin{cases} u = x^2 \\ x = a \Rightarrow u = \sqrt{a} \\ x = b \Rightarrow u = \sqrt{b} \end{cases}$$

$$\int_{\sqrt{a}}^{\sqrt{b}} \dots du = \int_{\arctan\left(\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{3}}\right)}^{\arctan\left(\sqrt{\frac{b}{3}}\right)} \dots d\theta$$



8. A Figura 2 mostra um cabo telefônico suspenso entre dois postes em $x = -b$ e em $x = b$. Devido ao peso, o cabo adota a forma de uma *catenária*, descrita por $y = c + a \cosh\left(\frac{x}{a}\right)$.

A função $\cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ é chamada de *coseno hiperbólico*. Existe também a função *seno hiperbólico*, definida como $\sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$.

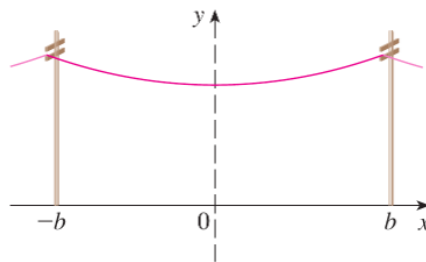


Figura 2: Cabo telefônico suspenso em forma de catenária

- (d) Mostre que a inversa de $\cosh(x)$, chamada *arco-coseno hiperbólico*, é dada por

$$\operatorname{arccosh}(x) = \ln\left(x + \sqrt{x^2 - 1}\right).$$

- (e) Suponha que os postes da Figura 2 estejam distantes 50,0 m um do outro, o ponto mais baixo do cabo está a 10,0 m solo e os pontos de sustentação do cabo, no poste, estão a 11,5 m de altura.

- Identifique na figura as medidas descritas acima.
- Identifique os valores de a e c na função $y = c + a \cosh\left(\frac{x}{a}\right)$ para descrever as medidas acima. (Pode ser necessário usar calculadora para obter alguns valores. Nesse caso, utilize três algarismos significativos.)
- Qual a altura do cabo em $x = 12,5$ m?

$$y = c + a \cosh\left(\frac{x}{a}\right)$$

$$x = a \operatorname{arccosh}\left(\frac{y-c}{a}\right)$$



$$y = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

$$2y = e^x + e^{-x}$$

$$e^x - 2\gamma + e^{-x} = 0 \quad (x \neq 0)$$

$$e^{2x} - 2\gamma e^x + 1 = 0$$

$$(e^x)^2 - 2\gamma (e^x) + 1 = 0$$

$$e^x = \frac{2\gamma \pm \sqrt{4\gamma^2 - 4}}{2}$$

$$e^x = \gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - 1}$$

$$e^x > 0 \quad \gamma \geq 1$$

$$x > 0$$

(domínio)

$$e^x = \gamma + \sqrt{\gamma^2 - 1}$$

$$e^x = \gamma - \sqrt{\gamma^2 - 1} \leftarrow$$

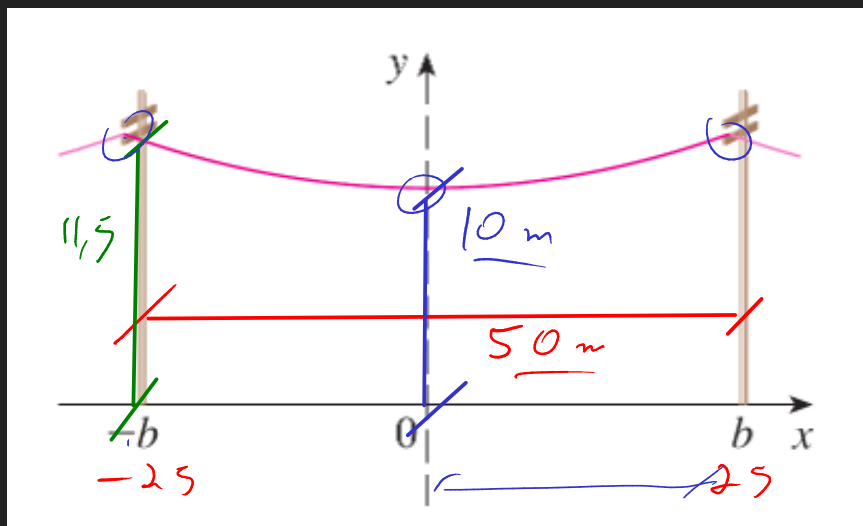
$$e^x = y + \sqrt{y^2 - 1}$$

$$\ln(e^x) = \ln(y + \sqrt{y^2 - 1})$$

$$x = \ln(y + \sqrt{y^2 - 1})$$

$$\operatorname{arccosh}(y) = \ln(y + \sqrt{y^2 - 1})$$

$$\operatorname{arccosh}(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1})$$



(e) Suponha que os postes da Figura 2 estejam distantes 50,0 m um do outro, o ponto mais baixo do cabo está a 10,0 m solo e os pontos de sustentação do cabo, no poste, estão a 11,5 m de altura.

- Identifique na figura as medidas descritas acima.
- Identifique os valores de a e c na função $y = c + a \cosh\left(\frac{x}{a}\right)$ para descrever as medidas acima. (Pode ser necessário usar calculadora para obter alguns valores. Nesse caso, utilize três algarismos significativos.)
- Qual a altura do cabo em $x = 12,5$ m?

$$y = c + a \cosh\left(\frac{x}{a}\right)$$

$$\begin{cases} 11,5 = y(x=25\text{ m}) = c + a \cosh\left(\frac{25}{a}\right) \\ \rightarrow 10 = y(x=0) = c + a \cosh(0) \end{cases}$$

1

$$\rightarrow c + a = 10 \text{ m} \Rightarrow c = 10 - a$$

$$c + a \cosh\left(\frac{25}{a}\right) = 11,5 \text{ m}$$

$$\begin{cases} 10 - a + a \cosh\left(\frac{25}{a}\right) = 11,5 \end{cases}$$

$$a \cosh\left(\frac{25}{a}\right) = 17,5 - 10 + a$$

$$\cosh\left(\frac{25}{a}\right) = \frac{7,5 + a}{a}$$

$$\operatorname{arccosh}(x) = \ln\left(x + \sqrt{x^2 - 1}\right).$$

$$\operatorname{arccosh}\left(\cosh\left(\frac{25}{a}\right)\right) = \operatorname{arccosh}\left(\frac{\overbrace{\left(\frac{3}{2a} + 1\right)}^{(3/2a + 1)}}{a}\right)$$

$$\frac{25}{a} = \ln\left(\left(\frac{3}{2a} + 1\right) + \sqrt{\left(\frac{3}{2a} + 1\right)^2 - 1}\right)$$

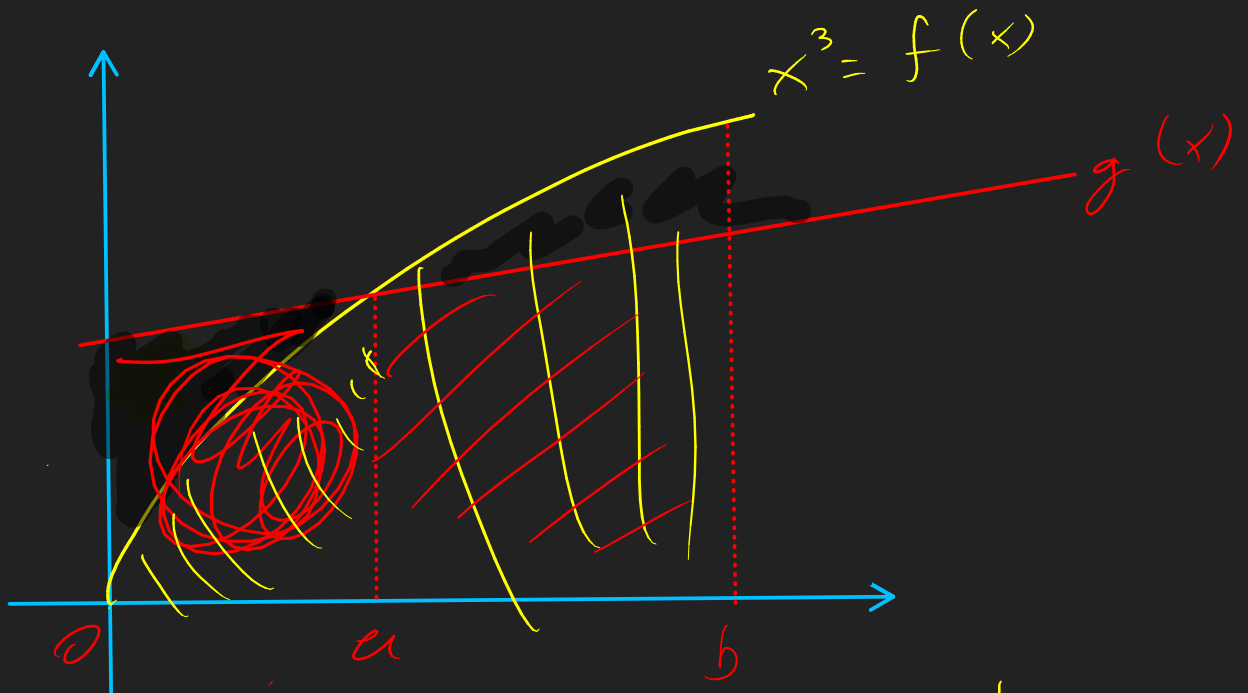
$$25 = a \ln(\dots)$$

$$25 = \ln\left(\left(\frac{3}{2a} + 1 + \sqrt{\left(\frac{3}{2a} + 1\right)^2 - 1}\right)^a\right)$$

$$e^{25} = \left(\frac{3}{2a} + 1 + \sqrt{\left(\frac{3}{2a} + 1\right)^2 - 1}\right)^a$$

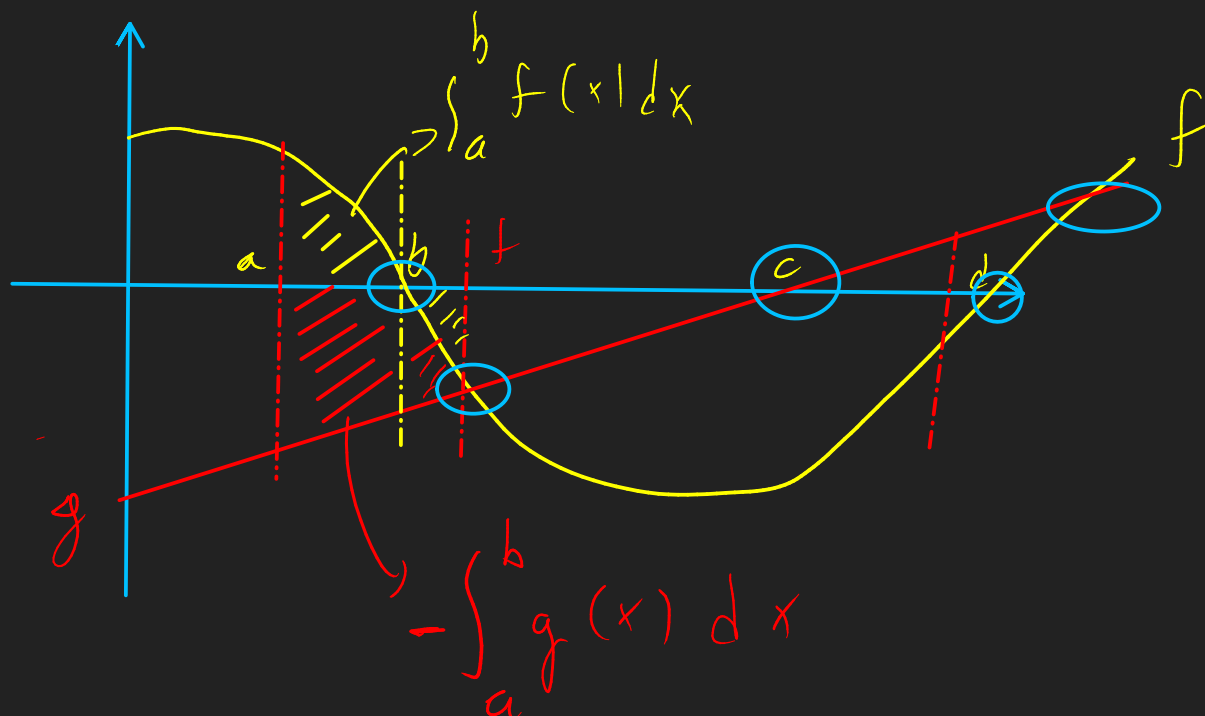
...

Área entre curvas



$$\text{Área: } \int_0^a g(x) - f(x) dx + \int_a^b f(x) - g(x) dx$$

$$\boxed{\int_0^a g(x) dx} - \boxed{\int_0^a f(x) dx}$$



$$A_2 = \int_a^b f(x) dx + \left(- \int_a^b g(x) dx \right)$$

$$= \int_a^b f(x) + \overbrace{g(x)}^{< 0} dx$$