Lista de exercícios 5
Cálculo II

Prof. Elton Carvalho — ECT — UFRN

Entrega: Quarta-feira 19/07/2023

1. Calcule o diferencial dz.

   (a) $z = x^3y^2$

   (b) $z = \operatorname{sen}(xy)$

   (c) $z = \operatorname{arcsen}(xy)$

   (d) $z = x^2 + xy^2 + \operatorname{sen} y$

2. Calcule $\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}$ fazendo uso da regra da cadeia.

   (a) $z = \operatorname{sen} xy,\ x = 3t,\ y = t^2$

   (b) $z = x^2 + 3y^2,\ x = \operatorname{sen} t,\ y = \cos t$

   (c) $z = \ln\left(1 + x^2 + y^2\right)$
   $x = \operatorname{sen} 3t,\ y = \cos 3t$

3. Seja $z = f(x, y)$ com $x = r\cos\theta$ e $y = r\operatorname{sen}\theta$.

   (a) Obtenha $\dfrac{\partial z}{\partial r}$ e $\dfrac{\partial z}{\partial \theta}$

   (b) Mostre que

   $$\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 = \left(\frac{\partial z}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial z}{\partial \theta}\right)^2$$

4. Mostre que qualquer função da forma $z(x, t) = f(x + at) + g(x - at)$ é uma solução da equação de onda

   $$\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}.$$

   Dica: Faça $u = x + at$ e $v = x - at$

5. Suponha que a equação $F(x, y, z) = 0$ defina implicitamente cada uma das três variáveis, x, y e z como funções das outras duas: $x = x(y, z)$, $y = y(z, x)$, $z = z(x, y)$. Se F for diferenciável e suas derivadas parciais forem todas não-nulas, mostre que

   $$\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial z} = -1$$

6. Em que direção e sentido a função cresce mais rapidamente no ponto dado? E em que direção e sentido decresce mais rapidamente?

   (a) $f(x, y) = x^2 + xy + y^2$ em $(1, 1)$

   (b) $f(x, y) = \ln \|(x, y)\|$ em $(1, -1)$

7. Determine o polinômio de Taylor de primeira ordem das seguintes funções em torno no ponto dado.
   (a) $f(x, y) = e^{x+5y}$ em $(0, 0)$
   (b) $f(x, y) = x^3 + y^3 - x^2 + 4y$ em $(1, 1)$
   (c) $f(x, y) = \operatorname{sen}(3x + 4y)$ em $(0, 0)$

8. Determine o polinômio de Taylor de segunda ordem das seguintes funções em torno no ponto dado.
   (a) $f(x, y) = x \operatorname{sen} y$ em $(0, 0)$
   (b) $f(x, y) = x^3 + 2x^2y + 3y^3 + x - y \operatorname{sen} y$ em $(1, 1)$

9. Utilize as curvas de nível na figura para prever os pontos críticos de f e se f possui um ponto de máximo, de mínimo ou de sela em cada ponto critico. Confirme suas previsões com o teste da segunda derivada (utilizando o determinante da Hessiana).

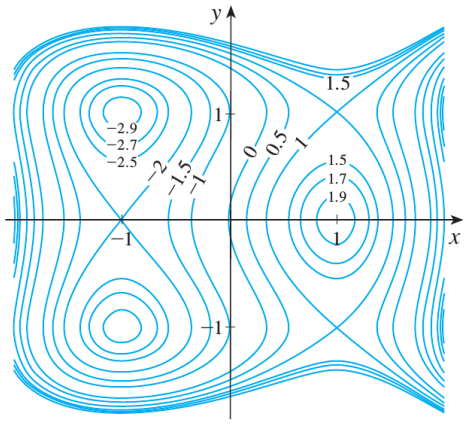

Figura 1: $f(x, y) = 3x - x^3 - 2y^2 + y^4$

10. Estude as seguintes funções com relação a máximos e mínimos locais.
   (a) $f(x, y) = x^2 + xy + y^2 + y$
   (b) $f(x, y) = (x - y)(1 - xy)$
   (c) $f(x, y) = e^x \cos y$
   (d) $f(x, y) = y \cos x$

11. Utilize multiplicadores de Lagrange para obter os valores máximo e mínimo da função sujeita ao vínculo dado.
   (a) $f(x, y) = x^2 + y^2;\ xy = 1$
   (b) $f(x, y) = 3x + y;\ x^2 + y^2 = 10$
   (c) $f(x, y) = e^{xy};\ x^3 + y^3 = 16$
   (d) $f(x, y, z) = xyz;\ x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 6$