Lista de exercícios 4
Cálculo II

Prof. Elton Carvalho — ECT — UFRN

Entrega: Sexta-feira 30/06/2023

1. Uma empresa fabrica três tamanhos de caixas de papelão: pequena, média e grande. O custo de fabricação de uma caixa pequena é de R$2,50, R$4,00 de uma caixa média e R$4,50 de uma caixa grande. Os custos mensais fixos são de R$8000,00.
   (a) Represente o custo mensal de produzir x caixas pequenas, y caixas médias e z caixas grandes em um mês como uma função de três variáveis: $C = f(x, y, z)$.
   (b) Obtenha $f(3000, 5000, 4000)$ e interprete-o.
   (c) Qual o domínio de f?

2. Seja $f(x, y) = 3x + 2y$. Calcule:
   (a) $f(1, -1)$
   (b) $f(a, b)$
   (c) $\dfrac{f(x+h, y) - f(x, y)}{h}$
   (d) $\dfrac{f(x, y+k) - f(x, y)}{k}$

3. Represente graficamente o domínio das seguintes funções:
   (a) $f(x, y) = \sqrt{2x - y}$
   (b) $f(x, y) = \dfrac{x - y}{\operatorname{sen} x - \operatorname{sen} y}$
   (c) $f(x, y) = \ln(9 - x^2 - 9y^2)$
   (d) $f(x, y) = \operatorname{arcsen}(x^2 + y^2 - 2)$

4. Desenhe as curvas de nível e esboce o gráfico:
   (a) $f(x, y) = 1 + y$
   (b) $f(x, y) = 10 - 4x - 5y$
   (c) $f(x, y) = 1 - x^2 - y^2$
   (d) $f(x, y) = 1 + x^2 + y^2$
   (e) $f(x, y) = 9 - x^2 - 9y^2$
   (f) $f(x, y) = e^{-y}$

5. Duas superfícies de nível de uma função $f(x, y, z)$ podem se cruzar? Justifique.

6. Na Figura 1 são mostrados dois conjuntos de curvas de nível, igualmente espaçadas. Um referente a uma função cujo gráfico é um cone e outro para uma função cujo gráfico é um paraboloide. Qual é qual e por quê?

7. Calcule o limite, caso exista:

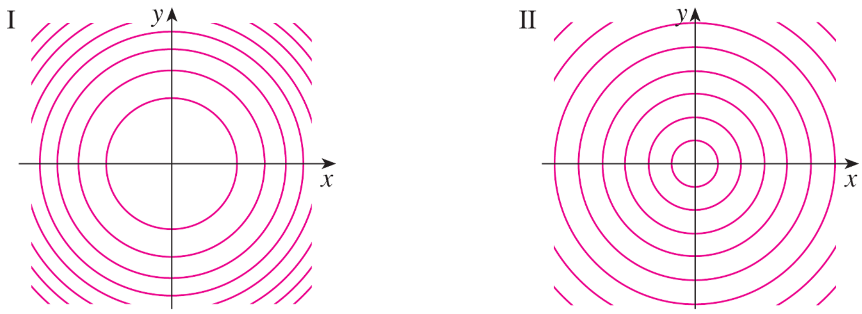

Figura 1: Questão 6: Curvas de nível.

(a) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} x \operatorname{sen} \dfrac{1}{x^2+y^2}$

(b) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}}$

(c) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^3}{\sqrt{x^2+y^2}}$

(d) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{xy^2}{\sqrt{x^2+y^2}}$

(e) $\lim\limits_{(x,y)\to(2,1)} \dfrac{4-xy}{x^2+3y^2}$

(f) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{y^2 \operatorname{sen}^2 x}{x^4+y^4}$

(g) $\lim\limits_{(x,y,z)\to(\pi,0,1/3)} e^{y^2} \tan(xz)$

8. Determine o conjunto dos pontos em que a função é contínua e justifique sua resposta.

(a) $f(x,y) = 3x^2y^2 - 5xy + 6$

(b) $f(x,y) = \ln \dfrac{x-y}{x^2-y^2}$

(c) $f(x,y) = \sqrt{6-2x^2-3y^2}$

(d) $f(x,y,z) = \operatorname{arcsen}(x^2+y^2+z^2)$

9. Obtenha as primeiras derivadas parciais de cada função:

(a) $f(x,y) = y^5 - 3xy$

(b) $f(x,t) = e^{-t} \cos \pi x$

(c) $z(x,y) = x^2 \operatorname{sen}^2 y$

(d) $z(x,y) = \tan(xy)$

(e) $f(x,y) = \dfrac{x}{y}$

(f) $f(x,y) = xye^{xy}$

(g) $z(x,y) = x^2 \ln(1+x^2+y^2)$

(h) $z(x,y) = \operatorname{arcsen}(x+y)$

(i) $z(x,y) = \arctan \sqrt{\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}}$

(j) $u(x,y,z) = e^{\frac{x}{y}} + e^{\frac{z}{y}}$

10. Seja $z = \dfrac{xy^2}{x^2+y^2}$. Verifique que $x\dfrac{\partial z}{\partial x} + y\dfrac{\partial z}{\partial y} = z$.

11. A função $p = p(V,T)$ é dada implicitamente pela equação $pV = nRT$, com n e R constantes não nulas. Calcule $\dfrac{\partial p}{\partial V}$ e $\dfrac{\partial p}{\partial T}$.

12. Calcule $\nabla f(x,y)$

(a) $f(x,y) = x^2y$

(b) $f(x,y) = e^{x^2-y^2}$

(c) $f(x,y) = \dfrac{x}{y}$

(d) $f(x,y) = \arctan \dfrac{x}{y}$

13. Verifique que o Teorema de Schwarz (Teorema de Clairaut) se aplica nas seguintes funções $u(x, y)$, ou seja, verifique que $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}$.

    (a) $u = x^4 y^3 - y^4$

    (b) $u = \ln(x + 2y)$

14. Seja $\phi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função diferenciável tal que $\phi'(3) = 4$. Seja $g(x, y, z) = \phi(x^2 + y^2 + z^2)$. Calcule:

    (a) $\dfrac{\partial g}{\partial x}(1, 1, 1)$

    (b) $\dfrac{\partial g}{\partial y}(1, 1, 1)$

    (c) $\dfrac{\partial g}{\partial z}(1, 1, 1)$

15. Se $f(x, y, z) = xy^2z^3 + \operatorname{arcsen}\left(x\sqrt{z}\right)$, obtenha $\dfrac{\partial^3 f}{\partial x \partial z \partial y}$.

    Dica: Qual a ordem em que a derivação fica mais fácil?

16. Se $g(x, y, z) = \sqrt{1 - xz} + \sqrt{1 - xy}$, obtenha $\dfrac{\partial^3 g}{\partial x \partial y \partial z}$.

    Dica: Derive cada termo em uma ordem diferente.

17. Você está no ponto do circular depois da aula do N34 e uma pessoa de sobretudo bege e chapéu de aba larga disfarçadamente lhe entrega um papel, onde está escrito que você pode confiar nela se existir uma função $f(x, y)$ cujas derivadas parciais são $\dfrac{\partial f}{\partial x} = x + 4y$ e $\dfrac{\partial f}{\partial y} = 3x - y$. Você deve confiar nela? Por quê?

18. Obtenha uma equação do plano tangente à superfície dada, no ponto especificado.

    (a) $z = 3y^2 - 2x^2 + x$, no ponto $(2, -1, -3)$

    (b) $z = xe^{xy}$, no ponto $(2, 0, 2)$

    (c) $z = x\,\operatorname{sen}(x + y)$, no ponto $(-1, 1, 0)$

    (d) $z = \ln(x - 2y)$, no ponto $(3, 1, 0)$

19. Seja $f(x, y) = \dfrac{x^3}{x^2 + y^2}$. Mostre que os planos tangentes ao gráfico de f passam pela origem.