Lista de exercícios 08

Prof. Elton Carvalho — ECT — UFRN

Entrega: Segunda-feira 23 de junho de 2025

1. Calcule e verifique sua resposta por derivação.

   (a) $\displaystyle\int 3\,\mathrm{d}x$

   (b) $\displaystyle\int \sqrt[5]{x}\,\mathrm{d}x$

   (c) $\displaystyle\int \frac{x+x^2}{x^2}\,\mathrm{d}x$

   (d) $\displaystyle\int \left(\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)\mathrm{d}x$

   (e) $\displaystyle\int \operatorname{sen} 4t\,\mathrm{d}t$

   (f) $\displaystyle\int \left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos 2x\right)\mathrm{d}x$

   (g) $\displaystyle\int \frac{\operatorname{sen} 2x}{\cos x}\,\mathrm{d}x$

   (h) $\displaystyle\int \left(\frac{1}{3}e^{3x}+\operatorname{sen} 3x\right)\mathrm{d}x$

2. (a) Verifique que $\operatorname{sen}^2 x = \frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos 2x$.

   (b) Calcule $\int \operatorname{sen}^2 x\,\mathrm{d}x$.

3. (a) Verifique que $\displaystyle\int \sec x\,\mathrm{d}x = \ln(\sec x+\tan x)+k$, com $x \in \left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$

   (b) Verifique que $\displaystyle\int \sec x\,\mathrm{d}x = \ln(-\sec x-\tan x)+k$, com $x \in \left]\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right[$

   (c) Mostre que $\int \sec x\,\mathrm{d}x = \ln|\sec x+\tan x|+k$

4. Calcule e verifique por derivação

   (a) $\displaystyle\int \cos^2 2x\,\mathrm{d}x$

   (b) $\displaystyle\int \cos^4 x\,\mathrm{d}x$

   (c) $\displaystyle\int \tan^2 x\,\mathrm{d}x$

   (d) $\displaystyle\int \sec x\,\mathrm{d}x$

   (e) $\displaystyle\int \frac{\cos x+\sec x}{\cos x}\,\mathrm{d}x$

5. Seja f uma função par $f(-x)=f(x)$ e contínua em $[-r,r]$, $r>0$.
   Mostre que $\displaystyle\int_{-r}^{r} f(x)\,\mathrm{d}x = 2\int_0^r f(x)\,\mathrm{d}x$. Interprete graficamente este resultado.

6. Calcule

(a) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{2}\,\mathrm{d}x$

(b) $\displaystyle\int_0^2 (t^2+3t-1)\,\mathrm{d}t$

(c) $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \cos 2x\,\mathrm{d}x$

(d) $\displaystyle\int_{-1}^0 e^{-2x}\,\mathrm{d}x$

(e) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+x}\,\mathrm{d}x$

(f) $\displaystyle\int_0^1 3^x\,\mathrm{d}x$

(g) $\displaystyle\int_0^1 \frac{2x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$

(h) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} (3+\cos 3x)\,\mathrm{d}x$

(i) $\displaystyle\int_0^1 \operatorname{sen} 5x\,\mathrm{d}x$

7. Esboce os conjuntos e calcule suas áreas:
   (a) Plano limitado pelas retas $x=1$, $x=3$, pelo eixo x e pelo gráfico de $y=x^3$
   (b) Plano limitado pelo eixo x, pelo gráfico de $y=x^3-x$, $-1\le x\le 1$
   (c) Plano limitado pelas curvas $y=\operatorname{sen} x$, $y=\cos x$, $0\le x\le \frac{\pi}{2}$
   (d) Plano entre as curvas $y=\cos \pi x$ e $y=4x^2-1$

8. Considere uma partícula em movimento retilíneo com a função velocidade (em metros por segundo) dada em cada item a seguir. Calcule o deslocamento total e a distância percorrida pela partícula no intervalo dado.
   (a) $v(t)=2t-5$; com $0\leqslant t\leqslant 5$
   (b) $v(t)=-9{,}81t$; com $0\leqslant t\leqslant 1$
   (c) $v(t)=-(0{,}1)2\pi\operatorname{sen}(2\pi t)$; com $0\leqslant t\leqslant 2{,}5$

9. (Bônus) Um foguete funciona expelindo gás a alta velocidade na direção oposta à aceleração desejada. Esse gás é resultado da queima do combustível[1] presente no foguete. Suponha que os motores do foguete estão ajustados para consumir seu propelente a uma taxa constante de k (em kg/s) para produzir uma força F constante[2], isso o sujeita a uma aceleração
$$a(t)=\frac{F}{m(t)},$$
onde $m(t)$ é a massa do foguete. Note que a massa do foguete diminui à medida que o propelente é consumido:
$$m(t)=M-kt,$$
com M sendo a massa inicial do foguete totalmente abastecido.

   A partir daí:
   (a) Escreva uma expressão para a aceleração $a(t)$ utilizando a função $m(t)$ dada.
   (b) Mostre que velocidade no tempo t será dada por
$$v(t)=\frac{F}{k}\ln\left(\frac{M}{M-kt}\right),$$
   considerando que o foguete começa parado ($v(0)=0$).

[1] Geralmente trata-se de uma mistura combustível + oxidante, chamada *propelente*, mas isso é irrelevante para o problema de cálculo…

[2] Isso significa, por exemplo, expelir uma massa k de propelente por segundo a uma velocidade v_e constante.

(c) Mostre que o deslocamento do foguete é dado por

$$x(t) = \frac{F}{k^2}(M - kt)\left[\ln\left(\frac{M - kt}{M}\right) - 1\right] + \frac{FM}{k^2},$$

a partir do instante $t = 0$.

(d) Para quais valores de $t > 0$ a função $m(t)$ perde o sentido?