Lista de exercícios 7
Cálculo I — 2025.1

Prof. Elton Carvalho — ECT — UFRN

Entrega: quarta-feira 28 de maio de 2025

1. Sejam a e b números reais positivos. Encontre o valor máximo de
$$f(x) = x^a(1-x)^b,\ 0 \leqslant x \leqslant 1.$$

2. Obtenha as dimensões de um retângulo com perímetro 100 m cuja área é a maior possível.

3. Obtenha as dimensões de um retângulo de área 1000 m^3 cujo perímetro é o menor possível.

4. Utilizando o método de Newton-Raphson (com o auxílio de uma calculadora para os valores das funções), obtenha, com 8 algarismos significativos, a solução da equação $\cos x = x$.

5. Calcule

   (a) $\displaystyle\lim_{x\to -1} \frac{4x^3+x^2+3}{x^5+1}$

   (b) $\displaystyle\lim_{x\to -1} \frac{x^{100}-x^2+x-1}{x^{10}+1}$

   (c) $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} x e^{\frac{1}{x}}$

   (d) $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} \frac{e^{3x}}{x^2}$

   (e) $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} \frac{e^{2x}}{x^3}$

   (f) $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} x^{\tan\left(x^2\right)}$

6. Determine o polinômio de Taylor de ordem 5 em torno do x_0 dado.

   (a) $f(x) = \operatorname{sen} x;\ x_0 = 0$

   (b) $f(x) = \cos x;\ x_0 = 0$

   (c) $f(x) = \operatorname{sen} x;\ x_0 = \frac{\pi}{2}$

   (d) Compare os polinômios dos itens (b) e (c).

   (e) $f(x) = \ln x;\ x_0 = 1$

7. Utilize os polinômios obtidos na questão anterior para estimar, com 5 algarismos de precisão (escolha o polinômio mais conveniente para cada caso):

   (a) $\cos 37^\circ$ (b) $\operatorname{sen} 9^\circ$ (c) $\operatorname{sen} 79^\circ$ (d) $\ln 1{,}7$

8. De acordo com a teoria da relatividade, o momento linear de uma partícula de massa m_0 e velocidade v é dado por
$$p(v) = \frac{m_0 v}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}.$$
Vamos chamar de u a relação $u = \frac{v}{c}$, que é a velocidade em unidades tais que a velocidade da luz $c = 1$. Assim, o momento linear fica:
$$p(u) = \frac{m_0 uc}{\sqrt{1-u^2}}.$$

(a) Escreva o polinômio de Taylor de ordem 3 para $p(u)$, em torno de $u_0 = 0$.

(b) Quando $u \ll 1$ (u muito menor que 1), os termos do tipo u^2 ficam *desprezíveis* e podem ser descartados. Nesse caso, o momento $p(u)$ é muito bem aproximado pelo seu polinômio de Taylor de ordem 1. Compare esse polinômio com o momento linear clássico: $p(v) = m_0 v$.

(c) Como exemplo, calcule o valor do termo de segundo grau para $m_0 = 1\,\mathrm{kg}$, $v = 100\,\mathrm{m/s}$ $\left(u = \dfrac{1}{3} \times 10^{-6}\right)$ e compare com o termo de primeiro grau. Essa é a chamada *correção de segunda ordem* no valor do momento.